

Utfordrende

Puslerier

for deg som kan litt sannsynlighetsregning

utarbeidet
av
Jostein Lillestøl

[Innholdsliste](#)

Disse pusleriene har vært mitt bidrag til puslerispalten i bladet Tilfeldig Gang (TG), medlemsbladet til Norsk Statistisk Forening. Spalten startet i 1990 og går fram til 2025.

Puslerier: Innholdsliste

1. Kinokø: Hvilken plass velger du? [klikk](#)
2. Amøbekoloni: Sjanse for å dø ut. [klikk](#)
3. Buss i motsatt retning: Hvorfor kommer de oftere? [klikk](#)
4. Auksjonsformer: Hva er best for selger? [klikk](#)
5. Tre myntkastproblemer. [klikk](#)
6. Forhold med ett-tall som første gjeldende siffer: Hvor sannsynlig? [klikk](#)
7. Terningkast med gevinst sum øyne inntil «ener»: Optimal stopping. [klikk](#)
8. Sokkeparproblemer [klikk](#)
9. Terningkast med ukjent overmalt side med nullgevinst. [klikk](#)
10. Sannsynlighet for å oppnå YATZY. [klikk](#)
11. Komite med flertallsvedtak og sovende komited medlem [klikk](#)
12. Laboratorium – vannprøver: Optimal batchstørrelse [klikk](#)
13. Kortstokk: Gjette hva som kommer opp [klikk](#)
14. Random walk i sirkel [klikk](#)
15. Hogge trepinner 1 [klikk](#)
16. Hogge trepinner 2 [klikk](#)
17. Uniform $[0,1]$ trekninger der høyeste tall vinner: Optimal strategi [klikk](#)
18. Lage tre terninger der A slår B, B slår C og C slår A [klikk](#)
19. Varians til kvadratrot av sum [klikk](#)
20. Dreidel: Et klassisk pengespill [klikk](#)
21. Entydig bestemmelse av fordeling ut fra momentsekvens? [klikk](#)
22. Brusautomater med «gevinst» [klikk](#)
23. Korrelasjon mellom gjennomsnitt og median. [klikk](#)
24. Krysse en by med trafikklys: Forventet antall stopp. [klikk](#)
25. Banachs fyrstikkproblem [klikk](#)
26. Skyte mot blink: Korreksjonsstrategier [klikk](#)
27. Triell: Sjansen for overlevelse [klikk](#)
28. Romfartøyer på planet: Kontaktsannsynlighet [klikk](#)
29. Forsamling: Ventetid til alle har satt seg [klikk](#)
30. To barnsfamilie: Sjanse for gutt født på tirsdag [klikk](#)
31. Fotball: Sjanser for seedet vinner [klikk](#)
32. Sirkelproblem: Punkts potens [klikk](#)
33. Garderobeskapspusleri [klikk](#)
34. Myntsamling: Sjansen for komplettering [klikk](#)
35. Uniform fordeling i og på sirkel [klikk](#)

- 36. Revy – sannsynlighet for siste inn får sitt eget sete [klikk](#)
- 37. Gjette ukjent farge: Strategi [klikk](#)
- 38. Eggslipp fra etasje: Forsøksstrategi [klikk](#)
- 39. Bilkolonner: Forventet antall ankomstgrupper [klikk](#)
- 40. Togkrysning: Kollisjonssannsynlighet [klikk](#)
- 41. Simulere rettferdig med skjev terning [klikk](#)
- 42. Heis: Den første opp eller ned? [klikk](#)
- 43. Utslagsturnering: Tippe utfall [klikk](#)
- 44. Pentagon i sikte: Hvor er jeg? [klikk](#)
- 45. Stemmeopptelling [klikk](#)
- 46. «Reality»-dueller [klikk](#)
- 47. Kuler TQM [klikk](#)
- 48. Nøkler [klikk](#)
- 49. Myntkast $2n+1$ [klikk](#)
- 50. Kooperativt spill: Per og Pål [klikk](#)
- 51. Påsketur: Per og Pål [klikk](#)
- 52. Kinokø [klikk](#)
- 53. Pensjonisttreff [klikk](#)
- 54. Distansering [klikk](#)
- 55. Parrondo's paradoks [klikk](#)
- 56. Trekantsimulering [klikk](#)
- 57. Sjakkmasterskap [klikk](#)
- 58. Reality show: Team matching [klikk](#)
- 59. Lukeparkering [klikk](#)
- 60. Ballutveksling [klikk](#)
- 61. Toilettbesøk [klikk](#)
- 62. Fuglemating [klikk](#)
- 63. Klatrevegg [klikk](#)

Pusleri nr. 1

Anta at du er alene i en fremmed by på skuddårsdagen. En kino annonserer at alle skuddårsbarn kommer gratis inn, de andre må stille seg i kø. Den første person i køen som kommer frem til luken, og som har samme fødselsdag som en som allerede har kjøpt billett, kommer også gratis inn. Anta at du vokter køen og slutter deg til denne når du tror at du har størst sjanse for å komme inn gratis. Hvilken plass i køen velger du?

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

[Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 2

En viss type amøbe har egenskapen at hvert minutt vil den enten dø, forbli som den er, dele seg i to eller dele seg i tre. Anta at de fire mulighetene er like sannsynlige. En slik amøbe puttes i en krukke. Hva er, med rimelige tilleggsantakelser, sannsynligheten for at amøbe(kolonien) i krukken dør ut?

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 3

Jeg ankommer bussholdeplassen nokså tilfeldig hver morgen, og registrerer hvor mange busser som går i motsatt retning før første buss i min retning kommer. Over en periode på 2 uker var det:

2 1 1 0 0 2 3 1 2 0

I gjennomsnitt noe over 1. Det var mystisk! Det må jo være sannsynlighet $\frac{1}{2}$ for at min buss kommer først og $\frac{1}{2}$ for at en buss i motsatt retning kommer først. Burde ikke da gjennomsnittlig antall busser i motsatt retning før min buss kommer være ca. $\frac{1}{2}$?

Problemstillingen kan belyses på ulike måter, fra den enkle og intuitive til den matematisk sofistikerte under ulike antakelser.

Pusleri nr. 4

Auksjoner kan foregå på flere måter, bl.a.

- (1) Bud høynes inntil ingen flere bud kommer. Siste budgiver betaler budt beløp ("First prize - open cry", kalt engelsk auksjon)
- (2) Alle budgivere byr i lukket konvolutt. Høyeste budgiver vinner og betaler budt beløp ("Sealed bid - first prize")
- (3) Auksjonarius setter pris over høyest tenkelige og senker priser inntil første budgiver slår til (kalt hollandsk auksjon).
- (4) Som (2), men høyeste budgiver betaler nest høyeste bud. ("Sealed bid - second prize").

Det er nokså lett å innse at (2) og (3) er ekvivalente.

Vis (under rimelige forutsetninger) at (1) og (4) er ekvivalente.

Aha! I valget mellom de to vanlige auksjonstypene (1) og (2), må derfor (2) være bedre for selger enn (1), fordi (2) gir det høyeste lukkede bud, mens (1) gir beløp ekvivalent med nest høyeste lukkede bud. Sant eller galt?

Hint: Hvis du ikke greier å avgjøre generelt det siste spørsmålet, som ga William Vickrey nobelprisen i økonomi, kan du som få lov til å tenke deg n personer som vurderer auksjonsobjektet iht. uavhengige trekninger fra den rektangulære fordeling $[0,1]$.

Pusleri nr. 5

Her er tre myntkastproblemer:

1. Hvordan kan du generere 50:50 sjanse med myntkast med en skjev mynt?
2. Hva er sannsynligheten for at KK forekommer i n rettferdige myntkast?
3. *Hva er sannsynligheten for at KMK forekommer i n rettferdige myntkast?

Pusleri nr 6

Hva er sannsynligheten for at forholdet mellom to uavhengige $R[0, 1]$ variable har et ett-tall som første gjeldende siffer? Hva blir sannsynlighetsfordelingen til første gjeldende siffer?

Er du innesnødd i påsken kan du gjerne løse den tilsvarende oppgaven med produkt, sum, differens,

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr 7

Et spill består av gjentatte terningkast med gevinst sum øyne, men dersom du får en ener, er spillet slutt og du har tapt alt.

Hva er den optimale strategi for å maksimere forventet gevinst og hva blir den forventede gevinst når denne følges? Hva blir sannsynlighetsfordelingen til gevinsten?

Finner du det siste spørsmålet for vanskelig eller for tidkrevende, kan skriv en makro som simulerer trekninger fra fordelingen. Hvem klarer å skrive makroen (f.eks. i Minitab) med færrest antall programlinjer?

Pusleri nr 8

"Eg har 24 sokkar, ikkje to av dei er par!"

synger Belbert i visa "Sokkane" i "popgruppa" Salhusvinskvetten.

Problemstillingen kan presiseres på minst to måter:

- (1) Belbert har n par sokker, men har somlet bort de fleste, har bare 24 igjen, og ingen av disse er par.
- (2) Belbert har 12 par sokker og har parret dem i ørska, men de passer ikke sammen.

Finn sannsynligheten ved begge presiseringer under rimelige antakelser. Hvor mange sokker måtte Belbert ha for at sjansen i (1) skal bli mer enn 50%?

Merk at (2) ikke er det samme som det mer velkjente matching-problemet, ofte benevnt som "hatteproblemet".

Pusleri nr 9

Du tilbys et spill med gjentatte terningkast, der gevinsten i hvert spill er antall øyne på terningen. På forhånd er terningen fikset ved at den trilles, og oppsiden overmales, slik at siden nå viser "0 øyne". Du får ikke vite på forhånd hvilken side som er overmalt, og heller ikke se terningen under spillets forløp, men får kun vite utfallet av hvert nytt terningkast.

Anta at innsats i hvert spill er 3 kr, og du kan velge å stoppe eller fortsette så lenge du vil.

- a. Hvilken strategi vil du velge, og hva er forventet gevinst ved å spille denne strategien?
- b. Hvilken innsats vil gjøre spillet til et rettferdig spill, under forutsetning **av** optimalt spill?

Pusleri nr 10

Hva er sannsynligheten for å oppnå YATZY ?

Med andre ord kast med 5 terninger, der målet er å oppnå samme antall øyne på de 5 terningene, men der en etter første kast har anledning til inntil to nye kast med det utvalg av terninger som ikke passer. Vi forutsetter at optimal strategi ved utvalget av terninger til nytt kast benyttes.

Finn gjerne en løsning egnet for numerisk beregning, for eksempel i Minitab.

Ekstraspørsmål:

Hvor mange ekstrakast må tillates for at sannsynligheten skal bli $> \frac{1}{2}$?

Hva er forventet antall kast som er nødvendig for å få YATZY?

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 11

En komite med $2n+1$ personer skal treffe en viktig beslutning ved flertallsvedtak. Anta at de $2n$ første stemmer uavhengig av hverandre og hver har sannsynlighet p for å treffe den (for deg) "riktige" beslutning. Den siste (som sovnet under møtet) kan enten være som de andre eller velge å stemme identisk med sidemannen. Vil da sjansen for "riktig" beslutning være uendret, økt eller redusert?

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 12

Et laboratorium skal analysere vannprøver fra n ulike kilder for forurensning. For å redusere antall analyser som må foretas, tilrettelegges samleprøver ("batcher") bestående av et uttak av vann fra k ulike prøver som blandes. Anta at k er divisor i n , eksempelvis dersom det er $n=12$ kilder, kan en lage 3 samleprøver med "blande vann" fra 4 kilder. Først analyseres hver samleprøve, og bare hvis en slik er forurenset analyseres vann fra hver av kildene til denne samleprøven.

Hva er den optimale batch-størrelsen k , og hvordan avhenger den av n ? Hvor mye analysearbeid kan spares? Når er $k=1$ optimalt, dvs. analysere hver av de n vannprøvene for seg.

Pusleri nr. 13

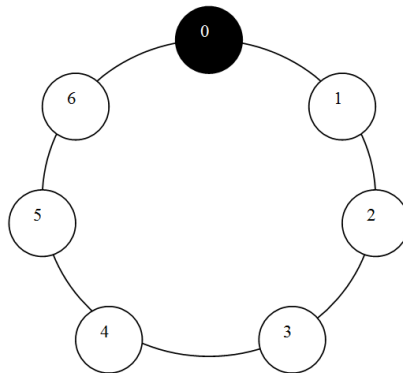
Ta for deg en vanlig godt stokket kortstokk med 52 kort, 26 røde og 26 sorte. Kortene blas opp ett etter ett, fra første kort til siste kort. Før hvert nytt kort vises, skal du gjette fargen på dette. Hva er forventet antall korrekte gjetninger?

[Løsning Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 14

En Canadagås og n brunsniler er plassert rundt en sirkel, i figuren illustrert med $n=6$ og gåsen i posisjon 0 og en snile i hver av posisjonene 1 til n . Gåsen gjør en "random walk" langs sirkelen, hvert steg til en av de to nærmeste posisjonene og spiser snilen som er der, hvis der er noen.

Hva er sannsynligheten for å bli lengstlevende snile i hver av posisjonene?
Hva er forventet levetid for hver av snilene?



En alternativ kontekst for problemet er:

Det sitter n personer ved et sirkelrundt bord og en ølmugge (0) som rommer en slurk til hver passerer iht. en "random walk". Har du allerede fått din slurk, skåler du bare og sender kruset fra deg. Hvor bør du unngå å sitte hvis du er veldig tørst? **Varianter av denne kontekst er også interessante, for eksempel at ølmuggen rommer m slurker eller er en Sareptas-ølmugge. Spørsmålene er mange.**

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 15

En trepinne med lengde 1 meter skal deles i tre med to øksehugg. Anta uavhengige hugg, som hver treffer iht. en uniform fordeling over intervallet $[0,1]$. Hva er sannsynligheten for at

- a) ingen bit har lengde over 0.5m?
- b) den midterste biten er størst?

Pusleri nr. 16

Nytt pinnepusleri: En trekvist med lengde 1 meter skal deles i tre med to økehugg. Anta at første hugg treffer iht. en uniform fordeling over pinnens lengde, og at en så griper den lengste pinnen som deles på tilsvarende måte. Hva er forventet lengde på den lengste av de tre pinnene en da sitter igjen med?

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 17

Et spill mellom to personer er basert på uavhengige trekninger $\text{Uniform}[0,1]$, der det gjelder å få det største tallet. Spiller nr.1 trekker sitt første tall, men kan velge om han vil forkaste det og trekke på nytt. I så fall må det nye tallet beholdes. Spiller nr. 2 gjør akkurat det samme, med den forskjell at hun ser hvorvidt spiller nr.1 velger å trekke på nytt eller ikke. Spørsmålet er:

Hva er optimal strategi for hver av de to spillerne?

Man kan tenke seg to situasjoner, der versjon 2 trolig er en langt større utfordring enn 1 :

1. Spiller nr. 1 vet ikke at spiller nr.2 "titter".
2. Spiller nr. 1 vet at spiller nr.2 "titter" (og spiller nr.2 vet at nr.1 vet...).

Pusleri nr. 18

Vi skal lage tre terninger A, B, C med vanlig seks-sidig form, der tallene på sidene er valgt blant tallene fra 1 til 9. Forsøk, om mulig, å lage terningene slik at en ved kast med to av dem har at de tre begivenhetene "A slår B", "B slår C" "C slår A" alle har sannsynlighet større enn $\frac{1}{2}$. En bør også kunne argumentere for at en eventuell funnet løsning er den eneste mulige.

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 19

Etter mange puslerier om sannsynligheter kommer et statistisk, som sikkert kan belyses ut fra ulike synsvinkler:

La $X_1, X_2, \dots, X_n$ være uavhengige variable med samme forventning og samme endelige varians. Variansen til summen S_n vokser da lineært med n mot uendelig.

Spørsmål: Er det slik at variansen til kvadratroten av summen vokser med kvadratroten av n mot uendelig? Hvis ikke, hva skjer? Hva med variansen til kubikkroten av summen?

Løsning [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 20

Dreidel er et gammelt spill med jødisk opprinnelse, der en bruker en firesidig terning (tetraeder) med sider markert med N, G, H og S. Spillet tillater et vilkårlig antall spillere p , og starter med at alle legger en pengeenhet i potten. Så kastes dreidelen av spillerne etter tur. Resultatet for spiller ved de ulike utfall er N="Nun"=ingen gevinst, G="Gimel"= Hele potten, H="Hay"=Halve potten, S="Shin"=Legg en pengeenhet i potten. Hver gang potten tømmes bidrar alle spillere med en pengeenhet, og spillet fortsetter.

Hva er forventet utbetaling for spilleren i n 'te spilleomgang?

Hva er forventet utbetaling til første spiller som tømmer potten?

*Hva er forventet nettogevinst for hver spiller for en spillerunde, dvs. inntil potten tømmes?

Kommentar: Spillet foregår typisk ved at hver spiller har et gitt beløp, for eksempel 20 pengeenheter, og varer inntil en spiller sitter igjen med alt. Dette gir opphav til ytterligere og mer utfordrende problemer.

Løsning [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 21

Gitt at $EX^n = \frac{1}{n+1}$ $n = 1, 2, 3, \dots$. Vis at den uniforme fordeling over $[0,1]$ er den eneste fordeling med denne sekvens av momenter.

Kommentar: Problemet har en interessant forhistorie knyttet til a posteriori beregningen av binomisk p for uniform prior. Thomas Bayes (1702-1761) var blant de første til å diskutere dette, og viste flere resultater uten dagens begreper og metoder. På hans tid ble parametere betraktet som diskrete størrelser. Bevis måtte skje uten integraler og differensialresonnementer, slik vi kjenner det, og man gikk ikke ut over endelig additivitet. Beviser måtte derfor ofte ta (unødige) omveier. I ettertid har man funnet ut at Bayes bevis av a posteriori problemet hadde et hull, som kunne fylles med referanse til ovenstående resultat.

Pusleri nr. 22

En ny type brusautomater tar bare 10-kroners mynter, og gir ikke tilbake vekslepenger. Dersom en flaske brus koster mindre enn 10 kroner, kommer en brus, samt mynten i retur med en viss sannsynlighet. Denne er slik at forventet beløp til automateier pr. myntinnkast blir korrekt. Per og Pål er svært tørste. Den billigste brusen koster 8 kroner, men de har bare en 10 kronemynt "på fellesen".

Hva er sannsynligheten for at de får (minst) hver sin brus?
Hva er forventet antall brus de kan få ut av 10-kronen?

En annen brusautomat tar også bare 10-kroners mynter, og gir ingen mynt i retur, men gir isteden en ekstra brus med en viss sannsynlighet. Denne er slik at forventet verdi av utlevert brus pr. myntinnkast blir korrekt.

Hva er sannsynligheten for at de får hver sin brus?
Hva er forventet antall brus de får ut av 10-kronen?
Hvilken av de to brusautomatene vil Per og Pål foretrekke?

Per og Pål lurte på om forventet kostnad pr. mottatt brus er lik 8 kroner, slik det bør være sett fra kundens side. Avgjør om så er tilfelle. Hvis ikke, hva er retursannsynlighetene som gir rettferdighet for hver av automatene?
Endrer dette noe på hvilken automat som bør foretrekkes?
Hva mener du om spørsmålet om hva som er rettferdig?

Pusleri nr. 23

For n uavhengige standardnormalfordelte variable, hva blir (evt. tilnærmet) korrelasjonen mellom gjennomsnittet $\bar{X}_n$ og medianen M_n ?

Hva kan sies om dette dersom vi fjerner antakelsen om normalitet?

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 24

Du bor i en by med kvadratisk gatestruktur, og vil besøke Per som bor m kvartaler øst og n kvartaler nord for deg. Alle gangfelt er lysregulert med vekslende grønt og rødt lys, og møter du et rødt lys i gangretningen, som er øst evt. nord, skifter du gangretning uten stopp til nord evt. øst, krysser gaten, og fortsetter i samme retning etter samme prinsipp, så lenge en slik mulighet fortsatt finnes. Anta at trafikklysene er usynkroniserte, og at rødt eller grønt i gangretningen er like sannsynlig. Hva er forventet antall nødvendige stopp for rødt lys inntil du er framme hos Per? Angi spesielt tilfellet $m=n$.

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 25

Du har to fyrstikkesker med n fyrstikker i hver eske. Hver gang du trenger en fyrstikk velger du en av eskene tilfeldig, og bruker en fyrstikk fra denne. Slik fortsetter du, uten å holde rede på hvor mange fyrstikker du har brukt, inntil den eske du åpner er tom. Hva er forventet antall fyrstikker i den andre esken?

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 26

Tenk deg at du skyter mot blink, og at du etter hvert skudd vurderer avviket mellom treffpunkt og senterpunkt, med sikte på eventuell korrigering av siktet.

Betrakt hver av de fire strategiene:

1. Skyt som før uansett siste avvik.
2. Korriger vekk fra nåværende innstilling iht siste avvik.
3. Korriger vekk fra opprinnelig innstilling iht siste avvik.
4. Rett siktet mot siste treffpunkt uansett hvor det er.

Hva kan sies om disse strategiene mht. risiko for avvik fra blinken?

Har du analogier fra andre felt eller dagliglivet for noen av disse strategiene?

Pusleri nr. 27

A, B og C skal gjøre opp sitt mellomværende ved en trekantduell som foregår slik: Deltakerne står hvert sitt hjørne av en likesidet trekant. Hver deltaker skyter etter tur, et skudd om gangen, startperson og rekkefølge avgjøres ved loddtrekning. Dette fortsetter i samme sykliske rekkefølge inntil en av deltakerne står alene tilbake som den overlevende. Det står hver deltaker fritt til å sikte og skyte på hvem han vil. Alle tre deltakere vet at A alltid treffer det mål han sikter på, B treffer med sannsynlighet 0.80 og C treffer med sannsynlighet 0.50. Anta at alle tre deltakere velger sin beste strategi.

Hvem har størst sjanse for å overleve?

Hva er sannsynlighetene for at henholdsvis A, B og C overlever?

Pusleri nr. 28

Planeten X er en kule med senter i O. Tre romfartøyer A, B og C har landet på overflaten, tilfeldig og uavhengig av hverandre. De to fartøyer {A,B} kan kommunisere med hverandre direkte, hvis og bare hvis $\angle AOB$ er mindre enn 90° . og tilsvarende for {B, C} og {A, C}. Finn sannsynligheten for at alle kan få kontakt med hverandre, dvs. enten direkte eller via det øvrige romfartøyet.

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 29

I en forsamling på n personer blir alle bedt om å reise seg, finne fram en mynt, knipse den. Dersom den viser kron, får en sette seg. Dette gjentas runde etter runde, til alle har satt seg.

La X være antall runder som trengs. Hva er sannsynlighetsfordelingen til X og EX ?

Beregn EX dersom det dreier seg om (i) $n=10$ i festlig lag (ii) $n=100$ personer på en forelesning (iii) $n=10\,000$ på Brann stadion (iv) $n=100\,000$ på Camp Nou (FC Barcelona).

* Hva kan sies dersom n går mot uendelig?

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 30

"I en to-barnsfamilie er det minst en gutt. Hva er sannsynligheten for at begge er gutter?"

De fleste er nok allerede kjent med dette problemet, og vet at svaret er:

"Det kommer an på!" Dersom konteksten er tilbakeholding av informasjon blir svaret $1/3$, mens dersom den første vi møter er gutt, blir svaret $1/2$. Begge under standard uniformitetsantakelser. Nylig har det dukket opp en variant av denne:

"Jeg har to barn, og en er gutt født på tirsdag. Hva er sannsynligheten for at begge er gutter?"

En første reaksjon er at: "Tirsdag eller ikke kan da ikke ha noe å si!"

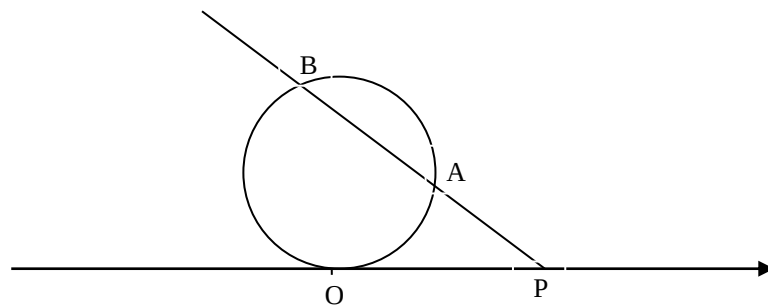
Et svar er: "Det har alt å si!" Enig eller uenig?

Pusleri nr. 31

I en fotballturnering deltar åtte lag, fire av disse er seedet foran de andre fire. Det spilles cup, og første runde (kvartfinalen) er oppsatt slik at hvert seedet lag møter et useedet. Anta at sannsynligheten for at et seedet lag slår et useedet er $p > 1/2$, og at i kamper mellom likt seedede lag har begge sannsynlighet $1/2$ for å vinne.

Hva er sannsynligheten for at

- (a) Et gitt seedet lag når finalen
- (b) Et gitt useedet lag når finalen
- (c) Et useedet lag når finalen
- (d) Et gitt seedet lag vinner
- (e) Et gitt useedet lag vinner

Pusleri nr. 32

Tegn en linje og en sirkel som berører linjen i punktet O. Avsett fra punktet O en lengde X langs linjen trukket fra normalfordelingen $N(0,1)$. Endepunktet i positiv eller negativ retning kaller vi P. Fra punktet P trekker vi en tilfeldig rett linje, som i figuren krysser sirkelen i punktene A og B.

Hva er sannsynlighetsfordelingen til produktet av avstandene PA og PB, gitt at linjen krysser sirkelen?

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 33

Arne er håndballtrener og en dag etter treningen samler han de 10 frammøtte rundt seg i gymsalen, og sier: "I garderoben er det akkurat 10 nummererte garderobeskap. Jeg har et foto av hver av dere og har plassert et bilde i hvert av skapene helt tilfeldig. Dere får slippe inn i garderoben en etter en, og får lov til å åpne halvparten av skapene, dvs. 5 skap hver, med sikte på å finne eget bilde. Om du lykkes eller ikke, legger du alt tilbake på plass, lukker skapene, slik at nestemann som kommer møter akkurat samme oppgave. Deretter forlater du garderoben ut døren til gangen, og går hjem, uten å kommunisere med de andre på laget. Dersom **alle 10** på laget har funnet eget bilde, blir det gratis treningsleir for alle. Jeg vil være tilstede i garderoben for å observere utfallet, og se til at alt går riktig for seg. Dere får en halv time til å diskutere oppdraget før vi setter i gang. Jeg går ut i garderoben imens. Forstått!"

Etter at laget er overlatt til seg selv, tar Bønna ordet først: "Hva er det å diskutere? Hver av oss har 50% sjanse for å finne vårt eget bilde, uavhengig av hva de andre gjør. Sjansen for at vi greier det alle sammen er da en halv opphøyd i tiende (som er mindre en promille), og slik er det samme hvilke skap de andre velger å åpne, så lenge vi ikke får gitt noe informasjon til de som kommer etter". Calle bryter inn: "Jeg er uenig. Enn om de 5 første av oss velger de 5 skap med lavest numre, og de 5 siste av oss velger skapene med de høyeste numre? Da tror jeg vil sjansen for å lykkes vil øke". Dølle har stått og grublet, og sier så: "Calle har rett, men hans løsning gir oss heller ikke særlig stor sjanse. Jeg mener det er mulig å velge en strategi som kan gi oss langt større sjanse for å komme på treningsleiren. Hør nå her...". Bønna bryter han av: "For noe tull. Dette er bortkasta tid å diskutere. La oss få det overstått, og komme oss ut herfra!"

Dølle klarer imidlertid å overbevise de andre med intuitive argumenter, og laget gikk med på hans strategi. Det viste seg at laget lyktes i sitt oppdrag, og kom på treningsleiren. Innen den tid hadde Dølle regnet ut sannsynligheten for at den strategien han foreslo skulle lykkes. Den var over 30%!

Greier du å gjøre han det etter?

Pusleri nr. 34

I USA gjennomførte man i perioden 1999-2008 The 50 States Quarters Program. Kort fortalt ble store mengder quartermynter sendt ut på markedet med motiver fra hver av de 50 ulike statene. Per hadde forskningsopphold i USA på denne tiden, og skrev bl.a. følgende i sin rapport hjem:

"Min datter Jenny prøver å få en fullstendig States Quarters samling, og hun har 47 ulike nå. Når vi får en slik quarter ser vi først etter om den passer i hennes samling, hvis ikke så legger jeg den til min egen samling, som har 34 forskjellige akkurat nå. Før vi begynte å samle spurte jeg meg selv:

Hva er forventet antall slike mynter som trengs før Jenny har en fullstendig samling?

Hva er forventet antall slike mynter som trengs før jeg også har en fullstendig samling?

I det siste har det gått lenge mellom hver gang vi finner en ny mynt, og jeg spør meg:

Hva er forventet antall flere mynter som trengs for Jenny og meg akkurat nå, når Jenny har 47 ulike mynter og jeg 34?

Per reiste også andre spørsmål, som trolig er mer krevende, bl.a. knyttet til forventet antall av den myntsort det er flest av i sparebøssen der alle mynter havnet som ingen av dem hadde bruk for, og spørsmål knyttet til situasjoner der han og datteren sluttet å samarbeide, f.eks. angående sjansen for at han fikk samlingen komplett før datteren.

Merknad. I virkeligheten var opplaget av de ulike myntene ikke det samme, og myntene ble introdusert til forskjellig tid. Samtidig var det fortsatt mange mynter av den gamle type. Se

http://en.wikipedia.org/wiki/50_State_Quarters.

Pusleri nr. 35

La Y_1 og Y_2 være uavhengige Normale(0,1) og la

$$Y_1 = \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} \quad \text{og} \quad Y_2 = \frac{X_2}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}$$

Da er opplagt (Y_1, Y_2) uniformt fordelt på sirkelen $Y_1^2 + Y_2^2 = 1$. La isteden

$$Y_1 = \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + Z}} \quad \text{og} \quad Y_2 = \frac{X_2}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + Z}}$$

der Z er ikke-negativ stokastisk variabel, slik at (Y_1, Y_2) er punkt på sirkelskiven $Y_1^2 + Y_2^2 \leq 1$. Hvilken sannsynlighetsfordeling må Z ha for at (Y_1, Y_2) blir uniformt fordelt på sirkelskiven?

Hint: Med Arkimedes på laget trenger du ikke papir og blyant.

Pusleri nr. 36

Ved et revyteater er alle billettene til kveldens forestilling utsolgt, og hver publikummer har billett som motsvarer en nummerert plass. På galleriet er det bare en inngangsdør, og publikum der står i kø og venter på at den skal åpnes. Den første i køen er imidlertid beruset og setter seg på en tilfeldig plass, som bare samsvarer med billetten hvis han har flaks. Så kommer de andre inn, en etter en, og setter seg på tildelt plass dersom denne er ledig. Hvis den ikke er ledig, ønsker den enkelte publikumer ikke å lage noe oppstyr, og velger en plass tilfeldig blant de som fortsatt er ledige. Dette fortsetter inntil alle har satt seg.

Hva er sannsynligheten for at den siste i køen får plass i henhold til sin billett?

Hint: Det er ikke nødvendig med papir og blyant!

Pusleri nr. 37

Ole, Dole og Doffen har julejobb i en sportsbutikk, der de selger sykkelhjelmer av to farger blå og grønn. Butikksjefen Guffen sier at alle skal få hver sin hjelm dersom de greier følgende fellesoppgave:

«Vi går inn i pauserommet med mange hjelmer av hver farge i en kasse. Jeg slukker lyset og plukker tilfeldig tre hjelmer fra kassen og setter en på hodet til hver av dere og lukker kassen. Jeg slår på lyset og dere ser hvilken farge det er på hjelmen til de to andre, men ikke egen farge. Dere skal så gjette hvilken farge det er på egen hjelm, og resultatet avgjør om alle skal få hjelm eller ingen av dere skal få hjelm. Dere får alle den hjelmen dere har på hodet hvis minst en av dere gjetter riktig, mens dersom minst en av dere gjetter feil, får ingen av dere hjelm. Dere kan imidlertid melde pass for å unngå å være den som spolerer det hele. Dere skriver hver deres gjetning (B eller G) eventuelt pass (P) på hver deres lapp uten ytterligere kommunikasjon med hverandre. Før vi går i gang har dere lov til å diskutere en felles strategi som kan øke sjansen for at dere lykkes».

Ole: «Sjansen for å lykkes er mindre enn 50% og det er feigt å si pass!»

Dole: «Nei, med pass har vi i hvert fall en strategi som gir oss akkurat 50% sjanse, men mer er det ikke mulig å oppnå!»

Doffen: «Jeg tror vi kan oppnå langt større sjanse, hør nå her.....»

Kan du hjelpe Doffen med å finne en slik strategi?

Ekstra utfordring: Hva tror du skjer dersom det er flere enn tre med?

Pusleri nr. 38

Knoll og Tott er på besøk hos Tuppen som er flyttet til byen for å studere. Hun bor øverst i en blokk med 10 boligetasjer over grunnplanet (0'te etasje). Knoll og Tott har med seg hvert sitt svært robust strutseeegg, og lurert på hvor høyt i etasjene de kan gå, slippe et egg ut vinduet, uten at det knuses når det treffer bakken. De har funnet ut at det er et vindu i hver etasje som lar seg åpne, og vil derfor gjøre et eksperiment med å slippe egg fra utvalgte høyder. Tuppen går motvillig med på dette, men tillater kun fire slipp i alt. Hva er den høyeste etasjeslipp det er mulig å fastslå med full sikkerhet at et slikt egg tåler/ikke tåler, og hvilken forsøksplan sikrer dette?

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 39

To byer A og B ligger svært langt fra hverandre er forbundet med en smal vei som umuliggjør forbikjøring. Vi sender avgårde n biler fra A, der hver er pålagt å kjøre med konstant fart. Farten til de enkelte bilene velges tilfeldig og uavhengig av hverandre fra en gitt sannsynlighetsfordeling $f(v)$. Hver gang en bil innhenter saktekjørende bil(er) må den regulere farten ned til de innhentede bilers fart. Hva er forventet antall "grupper" av en eller flere biler som ankommer B?

Hint: Spiller sannsynlighetsfordelingen noen rolle?

Pusleri nr. 40

To dobbeltsporede toglinjer, linje 1 (Syd/Nord) og linje 2 (Øst/Vest), krysser hverandre. Anta at alle tog "braser" gjennom krysset uten å ta omsyn til eventuelle varsler om kryssende tog. Vi ønsker å belyse kollisjonsrisikoen under følgende forutsetninger: Togsett på de to linjene har ulik lengde a_i ($i=1,2$), og ankommer krysset iht. en Poissonprosess med ulik rate λ_i ($i=1,2$), dvs. at ventetiden mellom hvert tog på hver av linjene er eksponensielt fordelt. Farten forut for krysningen antar vi er den samme lik v på begge linjene.

(a) Du har tatt et tilfeldig tog på linje 1.

Hva er sannsynligheten for kollisjon med kryssende tog?

(b) Hva er totalt forventet antall kollisjoner pr. tidsenhet?

Klargjør den rolle eventuell ulik fart på de to linjene forut for krysningen har.

Ikke bry deg om eventuelle komplikasjoner ved veldig lange tog, og eventuell rydding av linjen etter et krasj!

Pusleri nr. 41

Du skal simulere utfallet av et rettferdig terningkast, men til hjelp har du bare en sekssidet terning som ser skjev og rar ut. Greier du det likevel når du får lov til å trille den skjeve terningen flere ganger? Hint: $6=3!$

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 42

Hansen arbeider i nest øverste etasje i en bygning med seks etasjer over 0'te etasje. Den eneste heisen går kontinuerlig mellom etasjene 0,1,2,...,5,6,5,2,1,0,1,2...., og tar med folk der noen venter på heisen. Når han skal ta heisen ned og ut for å ta seg en røyk, så blir han ofte irritert over at heisen som oftest fortsetter opp. Han skjønner nok hvorfor, men spør seg hva sannsynligheten er, for at når heisen kommer, så går den ned. Han lurar også på hvordan situasjonen hadde vært med to parallelle heiser. Hva er da sannsynligheten for at den første heisen som kommer går ned? Han tror det må være det samme, men er ikke sikker.

Problemstillingen kan belyses ut fra ulike antakelser. Anta her heiser med samme fart og uavhengighet/ tilfeldig start, og at tiden det tar å tømme og fylle heisene er neglisjerbar i forhold til transporttiden. Det siste er selvsagt urealistisk, men tenk da på en såkalt paternosterheiser med kun en bås, der en hopper på og av i fart.

Pusleri nr. 43

En utslagsturnering har 32 lag, som gir til sammen $16+8+4+2+1=31$ kamper over 5 runder inntil vinneren er kåret. Du skal før turneringen stater tippe utfallet av alle kampene i turneringen, og skårer poeng som følger: 16 poeng for riktig vinner, 8 poeng for hver riktig semifinalvinner, 4 poeng for hver riktig kvartfinalevinner, 2 poeng for hver annenrunde vinner og 1 poeng for hver riktig førsterunde vinner. Det er altså mulig å skåre maksimalt $16+ 2 \times 8+4 \times 4+ 8 \times 2+16 \times 1=5 \times 16=90$ poeng. Anta at kampoppsettet foreligger i form av et tre, men at du ikke vet noe om lagene og tipper utfallet hver kamp langs grenene til roten (vinneren). Hva er forventet antall samlede poeng?

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 44

En bygning har omriss som en likesidet femkant, lik Pentagon i Washington, der sidelengden er 314m. Anta at den er plassert på en uendelig slette og kan sees derfra, uhindret av andre bygninger. Per vandrer tilfeldig rundt på sletten, og du får telefon fra han: «Akkurat nå ser jeg minst to sider av bygningen, men om det er to eller tre er vanskelig å si».

Hva er tilnærmet sannsynligheten for at han ser tre sider av bygningen?

Bonusspørsmål: Kort etter ringer Per opp igjen og sier: «Washington her! Jeg var blendet av morgensolen, men ser nå tre sider av bygningen. Oops!, der forsvant to av dem!». Kan du ut fra dette si presist hvor han befinner seg?

Pusleri nr. 45

En avstemning mellom to kandidater har A fått a stemmer og B fått b stemmer, der $a > b$. Opptellingen foregår ved at en etter en stemme trekkes fra stemmeurnen. Hva er sannsynligheten for at kandidat A vil lede opptellingen fra begynnelse til slutt?

Pusleri nr. 46

Ved innspillinen av et reality-show for TV er det tre deltakere A, B og C som står i fare for å måtte reise hjem. Av disse har C oppnådd en bonus, som skal gi en viss fordel i den avsluttende konkurransen om hvem av dem som må reise. Konkurransen går som etterfølgende dueller slik: I første duell møtes A og B, mens C sitter «på vent». Taperen av duellen er nå i faresonen som markeres med et «gult kort». I andre duell må taperen av første duell konkurrere mot C, mens vinneren av første duell settes «på vent», ute av faresonen, dvs. eventuelt gult kort inndras. Slik fortsetter vi, duell etter duell, gir taper gult kort og setter vinner på vent med eventuelt gult kort inndratt, inntil en av de tre har to gule kort, dvs. har to etterfølgende tapte dueller. Denne deltaker må så reise hjem.

Hvor stor er den bonusfordelen som C har fått ved først å sitte på vent, gitt at de tre er like gode?

Pusleri nr. 47

Per har tre kuler, og tar for seg en etter en, og maler den hvit eller svart med sannsynlighet $p=1/2$ uavhengig av hverandre. Per legger så de tre kulene i en urne som han leverer til Pål. Pål kjenner med hånden at det er tre kuler, og griper tilfeldig med neven to av dem.

Hva er sannsynligheten for at den gjenværende kula i urnen er hvit, gitt at begge uttrukne er hvite?

Generaliser resultatet så langt du kan, og få fram gode læringspunkter.

Pusleri nr. 48

Stipendiat S har et nøkkelknippe med fem nokså like nøkler. Når han kommer sent hjem er det enten fordi han har jobbet lenge på labben og derfor er edru, eller fordi han har tatt en tur på byen og er garantert beruset. En kveld han er sen har samboeren, som er statistiker, allerede gått til sengs og gjort seg opp mening om grunnen. Plutselig hører hun sin stipendiat utenfor døren fomle med nøklene. Hun regner med at han prøver ut nøkkel etter nøkkel, uten tilbakelegging dersom han er edru, og med tilbakelegging dersom han er beruset. Først på femte forsøk lykkes han.

Da blir hun litt mildere stemt. Hvorfor?

Pusleri nr. 49

A og B skal hver for seg gjennomføre rettferdige myntkast. B får n kast, mens A får lov til å ta et kast mer, dvs. $n+1$ kast. Hva er sannsynligheten for at A får flere kron enn B etter de $2n+1$ kastene?

Hint: Det fins en svært enkel løsning.

Er sannsynligheten for at B får flere kron enn A like lett å finne?

Tilleggsspørsmål: Generaliser til at A får ta m kast mer enn B, der $m > 1$.

Pusleri nr. 50

Per og Pål har kranglet, og som straff har de fått husarrest for resten av kvelden. Begge ønsker imidlertid å gå på Brann-kamp, og inngår i forhandlinger med moren. Hun foreslår følgende: «Her har dere hver deres mynt. Gå til hvert deres rom, og bli der uten å ha kontakt med hverandre. Om 10 minutter kommer dere ned i stuen, enten med mynten eller lar den være igjen på rommet. Eventuelle mynter dere har med blir knipset, og ved alt annet enn kron må dere forbli hjemme, som altså også vil skje dersom begge lar sin mynt bli igjen på rommet».

Hva er sannsynligheten for at Per og Pål kommer seg på kamp, gitt at begge gjør det optimale valg?

Pusleri nr. 51

Brødrene Per og Pål er på hyttetur i påsken med hver sin venninne. Det er bitende kaldt og guttene har lovet å stå opp tidlig om morgenen og fyre i ovnen. De har bestemt seg for å trekke lodd hver kveld om hvem av de to som må til pers neste morgen. Loddtrekningen skjer ved trekning av en kule fra en skilue med kuler, hentet fra Kinasjakken. Per har rød kule og Pål blå kule, og den med fargen på uttrukken kule må fyre opp neste morgen. Den første kveld er det bare en kule av hvert slag i luen. Kvelden etter må den som slapp unna legge en kule til av sin farge i luen, slik at risikoen øker for å bli trukket ut til fyring neste morgen. På dette viset fortsetter de inntil begge guttene har tatt sin tørn. Da startes det på nytt med en kule hver, og slik går dagene. Per har store forventninger til påsken, og ønsker (og ser for seg) at den skal vare uendelig lenge. Men han gruer seg til å stå tidlig opp.

Hva er forventet antall netter til han må stå tidlig opp og fyre?

Nå varer påskeferien bare syv døgn, og de er enige om at dersom en av dem slipper unna fyringen alle seks første morgenene, så skal den fyre den siste.

Hva er nå forventet antall netter til Per må stå tidlig opp? Kommenter!

Pusleri nr. 52

En kinoforestilling skal snart begynne, og åtte personer er igjen i billettkøen. Billettprisen er 100 kroner per person. Billettøren tar kun kontanter, og har akkurat sluppet opp for vekslepenger. Anta at fire av de åtte har 100 kroner, mens de andre fire bare har en 200 kroner seddel hver, og at kundene står i tilfeldig rekkefølge.

Hva er sannsynligheten for at det oppstår veksleproblem?

Hva er den generelle løsning når det er $m=2n$ kunder i køen?

Hva om det er to flere med 200 kronesedler enn med 100 kroner sedler i køen, og billettøren hadde to 100 kronesedler i kassen forut for de m kundene?

Pusleri nr. 53

Fem pensjonistvenner har avtalt å møtes på eldresentret en gang i uken på et bestemt tidspunkt. De pleier å ankomme hver for seg i tilfeldig rekkefølge. Tre av dem har imidlertid uvanen at dersom ingen andre er der ved ankomst, så går denne sin vei uten å komme tilbake den dagen.

Hva er sannsynligheten for at de blir mange nok til å spille bridge?

Hva er forventet antall fremmøtte?

En av de upålitelige er strammet opp, og lover heretter å vente på de andre.

Hva blir nå sannsynligheten og forventningen?

Finn uttrykket for fordelingen til antall fremmøtte X og dens forventning generelt for tilfellet med n personer, hvorav m er pålitelige og $n-m$ er upålitelige, og går sin vei dersom ingen andre er kommet før.

Pusleri nr. 54

Under en pandemi har myndighetene krevd stans av organisert idrettslig aktivitet, også den som ikke innebærer kontakt mellom aktørene. Etter en tid får enkelte idretter starte trening under forutsetning av at det holdes avstand. Anta at det også gjelder for standplassen på en skytebane, der skytterne ligger på linje i båser, og at reglene sier at ingen kan ha bås rett ved siden av hverandre. Betrakt en skytebane med $n=5$ båser

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

Anta at skyttere ankommer etter tur, og velger bås etter «first come, first serve» prinsippet. Disse skytterne er ikke av det glupeste slaget, og er også uvillige til å bytte bås etter å ha gjort sitt valg. Anta at hver ankommen skytter velger bås tilfeldig blant de som fremdeles er ledige og samtidig oppfyller regelen om avstand. Når ingen flere får plass starter en skyteomgang.

Hva er sannsynlighetene for at banen blir/ikke blir utnyttet optimalt, og hva er forventet antall skyttere som får skyte i hver omgang?

Hommelvik Skytterlag åpnet sommeren 2020 sin nye 100 meters bane med $n=7$ båser (og eget rom med kaffekrok).

Hva blir her sannsynlighetene og forventningen?

For et stort antall skyttere n og det samme antall tilgjengelige båser, hva er andelen skyttere som får plass, dersom de oppfører seg som ovenfor?



Her må skytes inn at skyttere i Hommelvik Skytterlag neppe oppfører seg som ovenfor. Som vist i foto på deres hjemmeside fra åpningen av banen 30 juni 2020 er det god avstand mellom nabobåser, og ytterligere avstand synes unødvendig. Avstand i kaffekroken er nok vanskeligere å holde.

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 55

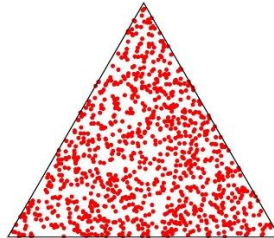
Pål er tilbudt et spill der en i hver spilleomgang kan vinne 1 myntenhet eller tape 1 myntenhet. Sannsynligheten for å vinne i en spilleomgang er imidlertid avhengig av spillerens monetære status for øyeblikket i forhold til utgangspunktet $S=0$. Dersom status er $S \equiv 0 \pmod{3}$ er sannsynligheten for å vinne 1 enhet kun lik $1/10$, ellers er denne sannsynligheten hele $3/4$. Pål lurer på om dette er rettferdig spill, gitt at han er tvunget til å følge dette oppsettet. På baksiden av en konvolutt noterer han at den ugunstige sannsynligheten opptrer ved status $0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots$, som utgjør en tredjedel av tallinjen, slik at den ubetingede sannsynligheten for å vinne en spilleomgang blir

$$P(\text{Vinne}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{16}{30} > \frac{1}{2}$$

Jøss, dette er til min fordel tenker Pål, og setter i gang å spille. Etter en (lang) stund uteblir den forventede positive gevinst, og han lurer på om noe er galt i utregningen. Kan du hjelpe Pål?

Pusleri nr. 56

Figuren viser simulerte punkter uniformt fordelt innenfor en likesidet trekant med sidelengde 1.



Finn en enkel geometrisk simuleringsmetode (dvs. med passer og linjal).

Finn en analytisk simuleringsmetode (dvs. med formel og bruk av regnekraft), helst en som lar seg generalisere til vilkårlig trekant og til rommet (tetraeder).

Tilgjengelig: Uavhengige Uniform[0,1]-variable U .

Dersom du raskt finner en analytisk løsning med tre U 'er og tre programlinjer i R for å simulere, beregne og plote resultatet, kan du jo prøve å finne en alternativ løsning som krever bare to U 'er og to programlinjer i R.

Pusleri nr. 57

I en sjakkklubb står kampen om klubbmesterskapet mellom A og B. Det er foreslått at det skal spille en serie partier der mester blir den som først vinner to partier på rad. Som medlem av klubben blir du bedt om å vurdere forslaget ut fra en sannsynlighetsteoretisk synsvinkel. Ta utgangspunkt i følgende:

Anta at for hvert parti at det er 50% sjanse for remis, 30% sjanse for at A vinner og 20% sjanse for at B vinner (dvs. uavhengig av hvem som spiller svart og hvit).

Hva er sannsynligheten for at A blir mester?

Hva er forventet antall partier som må spilles for å kåre mesteren?

Hvilke konsekvenser har det dersom sjansen for remis er større og/eller sjansen for å vinne et parti er mer jevn mellom A og B?

Pusleri nr. 58

I et TV-program, som TV2's Kompani Lauritzen, konkurrerer 14 kjendiser som rekrutter, 7 menn og 7 kvinner. Etter noen uker er 5 rekrutter dimittert, og 9 gjenstår, 5 menn og 4 kvinner. Anta at disse blir kommandert til å stille opp på linje i tilfeldig rekkefølge med ansiktet samme vei. Så kommer ordren: «Menn: Høyre om! Kvinner: Venstre om!». Resultatet blir at noen står ansikt til ansikt med en av motsatt kjønn, mens noen ser inn i en rygg til en av samme kjønn eller ut i tom luft. Hvert par som står ansikt til ansikt skal fortsette som oppdragsteam, mens de øvrige tas ut til en drittjobb (rengjøring av latrine).

Hva er sannsynlighetsfordelingen til antall team?

Hva er forventet antall rekrutter tildelt drittjobben?

Hva kan sies mer generelt?

Pusleri nr. 59

Lukas sin arbeidsplass har åtte langsgående parkeringslommer som vanligvis fylles opp ved arbeidshagens begynnelse. Lukas har «lukefrykt», dvs. misliker å lukeparkere. Derfor håper han å finne en åpning med minst to parkeringslommer på rad eller en endeplass. Erfaringsmessig kommer seks av hans kolleger tidligere enn han, slik at det bare er to ledige plasser når han kommer. I figuren er vist en dag Lukas måtte lukeparkere.



Lukeproblemet er selvsagt ryddet av veien med enighet om at alle fyller opp plassene forfra ved ankomst. Men akk, for Lukas ser det ut som kollegene gir blaffen i dette.

Anta i utgangspunktet at kollegene velger sin parkeringslomme tilfeldig blant de som er ledig, men ha i tankene alternativer til dette: At kolleger muligens kan være omtensomme, «lukeredde» eller infame.

Hva er sannsynligheten for at Lukas må lukeparkere, dersom vi antar at de seks før ankomne har valgt sine plasser tilfeldig? Hva kan sies generelt dersom det er m parkeringslommer og n før ankomne?

Pusleri nr. 60

Et lag med $n=5$ basketballspillere er oppstilt i en ring sammen med treneren som har ballen. Treneren starter en ballutveksling mellom de 6 i ringen inntil alle spillere har fått kjenne på ballen.

Finn forventet antall ballutvekslinger i følgende situasjoner

- (a) Enhver sender ballen videre til en tilfeldig av de fem andre.
- (b) Enhver sender ballen videre til en tilfeldig av de to naboene i ringen.

Påstand i (b): Alle har samme sjanse for å bli den siste som får kjenne på ballen.

Sant eller Usant?

Pusleri nr. 61

På din arbeidsplass er det kun ett toalett. Om det er ledig eller opptatt skal markeres med et skyveskilt på utsiden av døren, der hver bruker ved ankomst skyver til Opptatt (O) og ved utgang skyver tilbake til Ledig (L). I midlertid er det mange brukere som ikke følger den pålagte rutinen. Anta at bare $\frac{1}{3}$ av brukerne gjør det, mens $\frac{1}{3}$ markerer Opptatt, men glemmer å skyve tilbake til Ledig etter bruk. Den siste $\frac{1}{3}$ bryr seg ikke om skiltet i det hele tatt, og lar det stå urørt. Endelig anta at toalettet i virkeligheten er opptatt $\frac{1}{2}$ -parten av tiden.

Hva er sannsynligheten, gitt at dørskiltet viser Opptatt, for at toalettet virkelig er opptatt?
Hva er sannsynligheten, gitt at dørskiltet viser Ledig, for at toalettet virkelig er ledig?

Pusleri nr. 62

En spurv har seks sultne unger i sitt rede ($n=6$). Hver tur for å hente mat gir en porsjon mat til kun en unge, som disse må kjempe om. Det kan derfor godt hende at en eller flere ikke får en eneste porsjon, selv om spurven foretar mer enn seks turer ($m>6$). Anta (det utenkelige) at spurven ikke evner å fordele maten etter behov, og at ungene forblir like glupske, selv om de allerede har fått en eller flere porsjoner mat.

Hva er sannsynligheten for at alle har fått minst en porsjon mat etter $m=9$ turer?

Hvor mange turer trengs for å være 95% sikker på at alle har fått minst en porsjon mat?

Pusleri nr. 63

En klatrevegg er delt i tre etapper hver med sin store utfordring nær enden av etappen. Dersom taket glipper der faller klatreren helt ned, og må begynne på nytt. Anta for en klatrer at sjansen for å passere/dette ned er 50/50 i hver etappe, uavhengig av eventuell læring og økende tretthet.

Hva er forventet antall etappeforsøk klatreren trenger for å nå toppen?

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Løsninger

[Innholdsliste](#)

[Pusleri nr. 1 \(løsning\)](#)

Problemstilling: Når bør en skulle slutte seg til en kø for å være den første som har fødselsdag på samme dag til en eller annen foran i køen. La

p_k = person nr. k i køen har samme fødselsdag som en foran

q_k = de k første i køen har ulik fødselsdag

Da er (sett $p_1 = 0$ og $q_0 = q_1 = 1$)

$$p_{k+1} = q_k - q_{k+1} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Vi må finne den største k slik at $p_k > p_{k-1}$, eller ekvivalent, første k slik at $p_{k+1} < p_k$.

Nå er (her er $d = 365$)

$$q_{k+1} = q_k \frac{d-k}{d} = q_k - \frac{k}{d} q_k$$

slik at

$$p_{k+1} = \frac{k}{d} q_k = \frac{k}{d-k} q_{k+1}$$

Følgelig er

$$p_{k+1} - p_k = \frac{k}{d} q_k - \frac{k-1}{d-(k-1)} q_k = \frac{d+k-k^2}{d(d-k+1)} q_k$$

Ligningen

$$f(x) = d + x - x^2 = 0$$

har positiv løsning

$$x = 0.5 + \sqrt{d + 0.25} = 19.611$$

Den første heltallige k som gir $f(k) < 0$ blir derfor $k = 20$

Numerisk beregning ved rekursjonsformelen gir $p_{20} = 0.03232$.

Vi kan alternativt beregne q_k direkte ved kombinatoriske argumenter.

La $P(d, k)$ være antall permutasjoner av k elementer utvalgt fra d elementer. Da er

$$q_k = P(d, k)/d^k$$

Dette gir oss

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= q_k - q_{k+1} = P(d, k)/d^k - P(d, k+1)/d^{k+1} \\ &= (P(d, k) - P(d-1, k))/d^k = k P(d, k)/d^{k+1} \end{aligned}$$

Vi har i siste overgang benyttet følgende kombinatoriske identitet:

$$P(d, k) = P(d-1, k) + k P(d-1, k-1)$$

Denne følger ved argumentet: Fikser en dato. Tell opp antall kombinasjoner der denne ikke er med, så alle kombinasjoner der den er med på en av k mulige plasser og $k-1$ datoer til velges ordnet

blant de $d - 1$ øvrige. Denne kombinatoriske fremgangsmåten ser ikke ut til å lede til like åpenbar bestemmelse av optimal k . Numerisk bestemmelse er selvsagt like enkelt ved begge metoder.

[Pusleri nr. 2 \(løsning\)](#)

Vi skal finne sannsynligheten p for at en amøbe og dens etterkommere dør ut (uten bruk av teori for Branching Processes). Sannsynligheten for at en koloni med k amøber dør ut er, med uavhengighetsantakelse, lik p^k . Ved å betinge mhp. tilstanden etter et minutt får vi "likevektslikningen"

$$p = (p^0 + p^1 + p^2 + p^3)/4$$

Dette gir oss en tredjegradslikning, $p^3 + p^2 - 3p + 1 = 0$, som har to aktuelle røtter, $p = 1$ og $p = \sqrt{2} - 1$. Et mulig argument for å velge den siste roten er:

Anta at sannsynligheten for at en amøbe dør/forblir som før isteden er hhv. $1/4 - x$ og $1/4 + x$, der x kan være fra $-1/4$ til $1/4$. Den tilsvarende likning har da løsning $p = 1$ og $p = \sqrt{2 - 4x} - 1$. Siden $x = 1/4$ må gi $p = 0$, er den første roten uaktuell.

[Pusleri nr. 3](#) (løsning med innspill fra Geir Arne Kjønstad og Trond Haider)

Geir Arne Kjønstad:

Intuitiv løsning: Det er klart at sannsynligheten for at det kommer **en** buss i motsatt retning før din kommer er 0.5, men det kan jo også komme flere busser i motsatt retning før den første kommer i din retning. Dermed blir gjennomsnittlig antall over 0,5 for antall som kommer i motsatt retning før første buss i din retning.

Matematisk løsning:

$P(\text{din buss er først}) = 0,5 \Leftrightarrow P(\text{null busser før din første}) = 0,5.$

$P(\text{en eller flere busser før din første}) = 0,5$

Gjennomsnittlig antall busser per dag før din første vil etter ei (lang) stund konvergere mot forventet antall,

$E(\text{antall busser før din første})$

$= (\text{null busser før din første}) * P(\text{null busser før din første})$

$+ (\text{en eller flere busser før din første}) * P(\text{en eller flere busser før din første})$

$= 0 * 0,5 + (\sum x P(X = x), \forall x \in \mathbf{N}) * 0,5$, der X er antall busser som kommer før din og $P(X=x) = 2^{-x}$

$= (1 * 2^{-1} + 2 * 2^{-2} + 3 * 2^{-3} + 4 * 2^{-4} + \dots) * 0,5 = 2 * 0,5 = 1$

Så ved å fortsette å registrere gjennomsnittlig antall busser før den første i din retning, vil du etter hvert nærme deg 1.

Trond Haider: Det finnes i alle fall tre forklaringer på det observerte misforhold, med vidt forskjellige bakgrunner:

Den ene forklaringen er parallell til forklaringen på følgende pusleri, dog med noe mer tilfeldig variasjon siden det dreier seg om buss:

" En mann hadde to elskerinne. Hver kveld dro han hjemmefra for å besøke en av dem. Han lot skjebnen, i dette tilfellet Oslo Sporveier, bestemme hvem av dem han skulle besøke, ved å ta den av de to T-banene som førte ham til sine elskerinne som kom først. Hver av disse T-banene gikk 4 ganger i timen. Likevel viste det seg at over en tid hadde han besøkt den ene av sine elskerinne 65% av kveldene, mens den andre bare ble besøkt i 35%. Denne mannen hadde dessverre ikke hatt hverken statistikk i videregående eller besøk av Ørnulf B. på ungdomsskolen, så han forsto ikke helt hvordan dette kunne skje."

Den andre forklaringen bunner rett og slett i at denne mannen drar på jobb på et tilfeldig tidspunkt i rushtiden i rushretningen. Bussen han skal ta blir mye oftere påvirket, og forsinket, enn de bussene som går andre veien. De vil ha en jevnere strøm fordi de kom seg forbi motsatte (mannens) holdeplass før rushtiden satte inn. Siden mannen går til holdeplassen nokså, men ikke helt, tilfeldig, vil det derfor være færre busser i ens retning enn i motsatt.

Den tredje forklaringen er simpelthen at det går to bussruter forbi hans stoppested, men at han bare kan ta én av dem.

Kommentar fra Lillestøl: Jeg takker for de to innsendte forklaringene. Jeg velger (muligens feilaktig) å oppfatte Trond dithen at han søker etter mulige årsaker til et observert misforhold. Hans refleksjoner er i så måte interessante, og kan brukes i pedagogisk sammenheng. Spørsmålet er imidlertid om det observerte er et misforhold.

Geir Arnes resonnement var i hovedsak det jeg hadde i tankene, men hans oppstilling gir anledning til kommentarer som kan ha pedagogisk interesse. I beregningen av $E(\text{antall busser før din første})$ er den første likheten ikke formelt riktig: (en eller flere busser før din første) er ikke en verdi (men flere) som ikke kan veies direkte med en sannsynlighet. Det er vel setningen om dobbelt-forventning det legges opp til, ved å betinge mhp om min buss kommer først eller ikke: $E(X) = E(X | B=0)P(B=0) + E(X | B>0)P(B>0)$. Denne setningen er svært intuitiv, men ikke kjent av alle med elementære kunnskaper i sannsynlighetsregning (som 2MX/3MX i videregående skole).

Man trenger den heller ikke, men kan gå rett på oppstillingen

$EX = 0(1/2) + 1(1/4) + 2(1/8) + 3(1/16) + \dots = 1$, og så argumentere for at $P(X=x) = 1/2^{x+1}$. I denne

argumentasjonen vil betinget sannsynlighet og upåvirket gjenstående ventetid måtte inngå, dvs.

formalisering av de upresise utsagn i oppgaven om at både bussene og jeg innfinner oss tilfeldig.

Hvis vi tillater oss å bruke setningen om dobbeltforventning, er det en enklere oppstilling $EX = 0.5 \times 0 + 0.5 \times (1 + EX)$ som løst mhp EX gir 1, der vi har brukt et "fornyelsesargument" forankret i nevnt tilfeldigheter.

Jeg kan også forestille meg en mer generell løsning, der under visse forutsetninger $EX = (\mu^2 + \sigma^2)/2\mu^2$. Her vil spesialtilfellene at alle busser er i rute uten variasjon $\sigma = 0$ gi $EX = 1/2$ og ren tilfeldighet dvs. eksponensiell fordeling med $\sigma = \mu$ gi $EX = 1$. Et formelt bevis for dette kan skje ved fornyelsesteori og evt. ergodiske argumenter.

[Innholdsliste](#)

[Pusleri nr. 4 \(løsning\)](#)

La oss tenke oss bud på et hus, der hver budgiver har en bestemt oppfatning av hva huset er verdt. Ved hollandsk auksjon (3) lærer budgiverne ingen ting i budprosessen og kunne like gjerne ha skrevet ned budet på forhånd. Dette gir samme resultat som en lukket budrunde der høyeste bud vinner (2).

De to auksjonsformene (1) og (4) adskiller seg ved at engelsk auksjon (1) gir hver budgiver kunnskap om opponentenes bud og mulighet for å reagere på disse, noe som (2) ikke gir anledning til. Imidlertid vil det ved (1) for hver budgiver være optimalt å høyne budet (med så lite som mulig) så lenge den verdi vedkommende har satt på huset ikke er overskredet. Følgelig blir ved engelsk auksjon huset solgt til budgiveren med det høyeste bud marginalt over den med det nest høyeste bud.

Ved auksjonsform (4) vil optimal strategi for hver budgiver være å by den verdi en selv setter på huset i forvisning om at en kun trenger å betale det nest høyeste bud. Ingen budgiver har fordel av å by mindre, siden dette vil redusere sjansen for å få huset uten at prisen en må betale reduseres. Ei heller har en fordel av å by mer, siden dette bare øker sjansen for å vinne dersom også det nest høyeste bud er over ens egen verdiansettelse, og i så fall ender en opp med å betale mer enn hva huset er verdt (for en selv). Dersom alle byr sin private verdi vil altså huset bli solgt til høyeste byder til en pris for nest høyeste bud, som bare vil være marginalt forskjellig fra hva som oppnås ved (1).

For å belyse auksjonsform (2) tenker vi at det er n budgivere og at budgiver nr. i byr b_i på auksjonsobjektet som av budgiveren blir vurdert til verdi v_i . La $p(b)$ være sannsynligheten for at et bud lik b vinner budrunden. Resonnementene nedenfor innebærer en del betingning uten at dette blir synliggjort i notasjonen.

Forventet gevinst ved auksjonen for budgiver nr. i er da (alle budgivere er risikonøytrale!)

$$H_i = (v_i - b_i) p(b_i)$$

Siden alle budgivere står ovenfor det samme maksimeringsproblem, er det rimelig å anta at $b_i = g_i(v_i)$, der g har positiv derivert med invers h . Følgelig kan vi skrive

$$p(b_i) = P(\max_{j \neq i} g(v_j) < b_i) = P(\max_{j \neq i} v_j < h(b_i))$$

Antar vi at v_j 'ene er stokastisk uavhengige trekninger fra en kumulativ fordeling F blir

$$p(b_i) = (F(h(b_i)))^{n-1} = (F(v_i))^{n-1}$$

Dersom budgiver nr. i vil maksimere forventet gevinst må vi ha

$$p'(v_i)(v_i - b_i) - p(b_i) = 0$$

Sammenholdes de to siste ligningene får vi

$$(n-1) f(h(b_i)) h'(b_i) (v_i - b_i) - F(h(b_i)) = 0$$

For tilfellet at F er rektangulært fordelt [0, 1] blir dette

$$(n-1) h'(b_i) (h(b_i) - b_i) - h(b_i) = 0$$

Denne ligningen har løsning

$$v_i = h(b_i) = \frac{n}{n-1} b_i$$

Forventet pris blir da

$$\frac{n}{n-1} E \max v_i = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}$$

Hvis vi så sammenligner dette med (1) som var ekvivalent med (4), der det var optimalt å by egen verdsatt verdi, blir forventet pris i tilfellet med uavhengige R [0, 1] trivielt lik $(n-1)/(n+1)$, dvs. samme som ved (2). Altså er alle de fire auksjonsformer ekvivalente under de gitte forutsetninger.

[Innholdsliste](#)

[Pusleri nr. 5](#) (løsning)

Oppgave 1 (løsning): Den enkleste løsningen på oppgaven er trolig følgende: Kast den skjeve mynten to ganger. Hvis utfallene er like, dvs. KK eller MM, se bort fra resultatet. Hvis utfallene er ulike, dvs. KM eller MK bruk utfallet i det første kastet. Hvis en ønsker en følge av uavhengige utfall med $P(K)=P(M)=1/2$, kan en praktisk generere to følger med den skjeve mynten, stille de opp under hverandre og sammenligne de to utfallene i samme posisjon. Hvis de matcher, stryk begge, hvis de er forskjellige, bruk utfallet i den første sekvensen. Eksempelvis:

M M K M K K K M K K M K M M K M
M K M K K K M K K M K M M K K M

Her blir den rettferdige sekvensen sammensatt av de som er understreket i første linje.

Et annet forslag er: Generer en følge med den skjeve mynten, f.eks. slik at vi får

M,M,K,M,K,K,K,M,K,K,M,K,M,M,K,M,..... (1)

Grunnet symmetri kan vi snu annenhver mynt, slik at (1) blir til

M,K,K,K,K,M,K,K,K,M,M,M,M,K,K,K,..... (2)

som kan betraktes som trekninger fra en rettferdig mynt.

Det er en hake ved dette resonnement, nemlig at $P(K)=P(M)=1/2$ bare gjelder i stasjonærsituasjonen, som vanskelig kan realiseres uten en rettferdighetsmekanisme, f.eks. ved å neglisjere et jamt eller odde antall kast i starten med lik sannsynlighet.

Men selv i stasjonærsituasjonen blir dette ikke uavhengige realisasjoner. Vi får nemlig $P(KK)=P(MM)=p(1-p)$ og $P(KM)=P(MK)=(p^2+(1-p)^2)/2$, mens uavhengighet skulle gi $1/4$. Dette forslaget er imidlertid et godt utgangspunkt for å diskutere sentrale begreper, som uavhengighet, Markovkjede, stasjonæritet etc.

Takk til Øystein Arild for innspill.

Oppgave 2 (løsning): La g_n være sannsynligheten for at KK forekommer i n kast. Ved å betinge mhp. utfallet av første kast får vi

$$g_n = \frac{1}{2}g_{n-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}g_{n-2}\right) = \frac{1}{2}g_{n-1} + \frac{1}{4}g_{n-2} + \frac{1}{4} \quad g_0 = g_1 = 0$$

Denne inhomogene differensligning kan løses på vanlig måte med løsning av form

$$g_n = 1 + A_1 r_1^n + A_2 r_2^2$$

der r er røttene i ligningen $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{4} = 0$.

Dette gir

$$g_n = 1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n$$

Det fins en lettere vei:

Sett $f_{n+2} = 2^n - 2g_n$. Da blir

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad f_2 = 1 \quad f_3 = 2$$

som er den velkjente ligning som gir Fibonacci-tallene, som er tabellert bl.a. i Råde & Westergren: Mathematics Handbook.

Oppgave 3 (løsning): Har noen en vakker løsning, så kom med den. Min er det ikke!

Fra Grete U. Fenstad er mottatt: Som en mulig oppfølging av Pusleri nr.5 har den læreboka vi bruker i ST114 Modellering ved stokastiske prosesser et par oppgaver som sammenligner forventet antall kast før henholdsvis KKM og KMK oppnås. Det er kanskje litt overraskende at KKM gjennomsnittlig oppnås raskere enn KMK, uansett hva $P(K)=p$ er. Ved en rettferdig mynt er svarene henholdsvis 8 og 10. Men resultatet kan forklares.

[Innholdsliste](#)

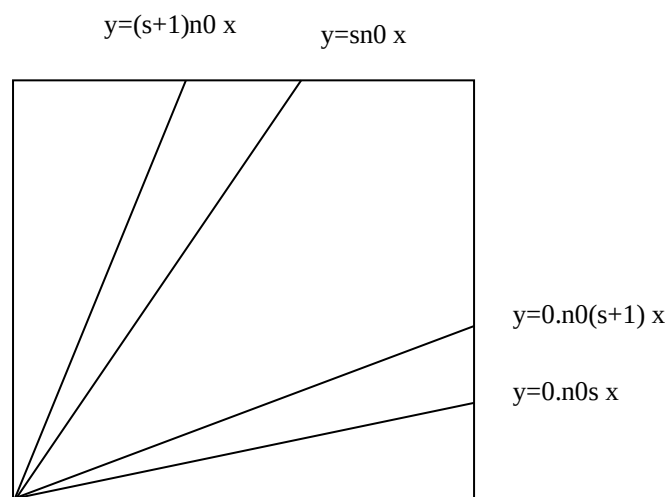
[Pusleri nr. 6](#) (løsning)

Sannsynligheten for at første gjeldende siffer i kvotienten er 1 er lik $1/3$!

Mer generelt er sannsynlighetsfordelingen til første gjeldende siffer:

$$p(s) = \frac{5}{9} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{s(s+1)} \right) \quad \text{for } s=1,2,\dots,9.$$

Det er to hovedtilfeller: kvotient mindre enn 1 eller større enn 1. Problemet er redusert til å beregne og addere arealet av et uendelig antall trekanter av hvert slag. I figuren nedenfor er illustrert en trekant av hvert slag, der symbolikken $n0$ betyr n nuller. Den første trekanten med kvotient mindre enn 1 (for $n=0$) har areal lik 0.1×0.5 uansett s . Hver ny trekant av dette slaget har areal $1/10$ av det forrige. Den geometriske rekken som fremkommer har sum $10/9$, slik at det samlede arealet av disse trekantene fås ved å multiplisere med denne faktoren. Den første trekanten med kvotient større enn 1 (for $n=0$) har areal $(1/s - 1/(s+1)) \times 0.5 = 1/s(s+1) \times 0.5$. Igjen har hver ny trekant areal $1/10$ av den forrige, og vi får den samme geometriske rekken som ovenfor og samme faktor $10/9$ å multiplisere med.



[Pusleri nr. 7 \(løsning\)](#)

La G_n være gevinst etter n spill dersom en spiller optimalt. Så lenge $G_n > 0$ er forventet gevinst ved å fortsette ett nytt spill lik

$$\frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot (G_n + 2) + \frac{1}{6} \cdot (G_n + 3) + \frac{1}{6} \cdot (G_n + 4) + \frac{1}{6} \cdot (G_n + 5) + \frac{1}{6} \cdot (G_n + 6) = \frac{1}{6} (5G_n + 20)$$

Dette gir følgende karakterisering:

$$E(G_{n+1} | G_n) = \max(G_n, \frac{1}{6}(5G_n + 20))$$

Vi fortsetter derfor så lenge $G_{n+1} > G_n$ som skjer så lenge $G_n < 20$.

La F_s være forventet samlet gevinst ved optimalt videre spill, dersom en nå har sum øyne lik s . Vi søker da F_0 som finnes ved rekursiv beregning nedover med utgangspunkt i at $F_s = s$ for

$$s = 25, 24, \dots, 20, \text{ mens } F_s = \frac{1}{6}(F_{s+2} + F_{s+3} + F_{s+4} + F_{s+5} + F_{s+6}). \text{ Svaret er } F_0 = 8.1418.$$

Problemstillingen kan sikkert belyses ved andre metoder. Kan noen varte opp med martingalargumenter?

Sannsynlighetsfordelingen til gevinsten er mer brysom å finne. Den er

g	$P(G=g) \times 6^{10}$	$P(G=g)$
0	37 763 596	0.6245
20	6 029 263	0.0997
21	5 743 720	0.0950
22	4 485 916	0.0742
23	3 277 030	0.0542
24	2 128 294	0.0352
25	1 038 357	0.0172

Beregningen kan skje ved (omfattende) kombinatoriske opptellinger av gunstige på mulige. En alternativ tilnærming er å utnytte at situasjonen kan beskrives som en Markovkjede med 26 tilstander og overgangsmatrise med en enkel struktur, der 7 tilstander er absorberende. Overgangsmatrisen kan lett potenseres vha. programvare som Matlab eller Maple, som også kan gi eksakt løsning på brøkkform.

Spillet kan simuleres med få kommandoer, eksempelvis i Minitab:

```
Random 10 c2; integer 1 6.  
Let c3=parsum(c2)*parprod(c2>1)  
Let k1=sum((c3>0)*(c3<20))  
Let k2=c3(k1+1)  
Stack k1 c1 c1
```

Her simuleres først 10 terningkast, som er det maksimalt antall nødvendige ($c2$). Delsummer (parsum) som beholdes eller nulles vha. den logiske variable ($c2>1$) beregnes og lagres ($c3$). Antall kast ($k1$) ett kast før stopp eller tap av alt er bestemt ved sum av produkt av to logiske variable. Gevinsten fins da $c3(k1+1)$, som puttes i $c1$, der resultatene ved gjentak av de 5 kommandoene bygger seg opp. De tre let-kommandoene lar seg skrive enda mer kompakt, men mindre gjennomskuelig.

Pusleri nr 8 (løsning)

Problemstillingen kan presiseres på minst to måter:

- (3) Belbert har n par sokker, men har somlet bort de fleste, har bare 24 igjen, og ingen av disse er par.
- (4) Belbert har 12 par sokker og har parret dem i ørska, men de passer ikke sammen.

Finn sannsynligheten ved begge presiseringer under rimelige antakelser. Hvor mange sokker måtte Belbert ha for at sjansen i (1) skal bli mer enn 50%?

Løsning (1):

$$\frac{\binom{n}{24} 2^{24}}{\binom{2n}{24}} = \frac{\binom{2n-24}{n} 2^{24}}{\binom{2n}{n}} = a_n$$

De gunstige består av et utvalg på 24 sokker et fra hvert par med to mulige valg fra hvert par. Omskrivingen er gjort for evt. å kunne benytte Stirlings formel ved beregningen.

Eksakt beregning, for eksempel i Maple, gir $a_{210} = 0.4983275905$ og $a_{211} = 0.5000746203$.

Uten "binomisk regnekapasitet", kan vi bruke rekursjon. Vi får nemlig for $n \geq 24$:

$$a_{n+1} = \frac{(2n-22)(2n-23)}{2(n-23)(2n+1)} a_n$$

Vi har ved Stirlings formel $a_{24} = 2^{24} / \binom{48}{24} \approx 0.520263 \cdot 10^{-6}$. Rekursjon gir da (med 5 desimaler)

$a_{210} = 0.498328$ og $a_{211} = 0.500075$. Svaret er altså $n=211$ par sokker.

Løsning (2):

Jeg hadde håpet på en elegant innsendt løsning, men den kom ikke. Dere får ta til takke med min løsning (vær vennlig å sjekk den for feil!). Den er basert på betinging som gir en todimensjonal differensligning, som jeg løser ved rekursjon. Merk at hadde det vært sko istedenfor sokker, ville oppgaven ha vært det berømte "hatteproblemet". Tenk deg en prosess med å velge ut to sokker av gangen, og beting mhp utfallet av første trekning, som, hvis det ikke er et par, kan være to sokker som var single igjen i haugen, eller en single og en som hadde sin "partner" igjen i haugen (kalt "dublett") eller to ulike dubletter. La det være $2n$ sokker igjen, der $2d$ er dubletter og $2s$ single.

La $P_{n,s}$ være sannsynligheten for ingen par blant $2n$ sokker som velges ut to av gangen fra en haug der det er $2s$ single (og $2d=2n-2s$ dubletter), der vi søker $P_{12,0}$. Vi får følgende ligning:

$$P_{n,s} = \frac{\binom{2s}{2}}{\binom{2n}{2}} P_{n-1,s-1} + \frac{\binom{2s}{1} \binom{2(n-s)}{1}}{\binom{2n}{2}} P_{n-1,s} + \left(1 - \frac{\binom{2s}{2} + \binom{2s}{1} \binom{2(n-s)}{1} + (n-s)}{\binom{2n}{2}}\right) P_{n-1,s+1}$$

Her er randkravene $P_{1,0} = 0$, samt $P_{n,-1} = 1$ og $P_{n,n} = 1$. Rekursjonen gir (ved bruk av Maple)

svaret $P_{12,0} = \frac{17070792512}{2874855847} = 0.5937964690$. Det er av en viss interesse å se hva som skjer

med $P_{n,0}$ når n vokser. Det ser ut som det går mot en grense på ca. 0.606 (for hatteproblemet er den tilsvarende grensen $e^{-1} = 0.3679$).

[Innholdsliste](#)

[Pusleri nr 9 \(løsning\)](#)

I første kast har vi ingen informasjon om hvilken side som er overmalt.

Antall øyne Y har sannsynlighetsfordeling

y		0	1	2	3	4	5	6
$P(Y=y)$	6/36	5/36	5/36	5/36	5/36	5/36	5/36	

og forventning $EY=35/12=2.91<3$. Imidlertid lønner det seg å forsette å spille inntil det er klarlagt om terningen gir oss en "pengepumpe" eller et "pengesluk". Vi kan ha 6 ulike terninger, hver med sannsynlighet $1/6$. La X =overmalt antall øyne. Da er $E(Y|X=x)$ gitt ved

x	1	2	3	4	5	6
$E(Y X=x)$	20/6	19/6	18/6	17/6	16/6	15/6

Dersom den overmalte siden er "1" eller "2" har vi en pengepumpe, mens dersom den overmalte siden "4", "5" eller "6" har vi et pengesluk. For "3" er fortsatt spill etter at terningen er "avslørt", rettferdige spill. Den optimale strategi er derfor å fortsette inntil dette er klarlagt. I utgangspunktet er forventet gevinst uendelig over en uendelig horisont, og tilbudet bør gripes med begjærighet. Spørsmålet om hva som gjør spillet rettferdig var en utlagt snubletråd. Er spørsmålet i det hele tatt meningsfylt? Vi har jo en blanding av spillehorisonter, før og etter terningen er avslørt, og det er vanskelig å definere rettferdighet som omfatter begge. Med en pengepumpe spiller det jo liten rolle hva man "søler vekk" i starten for å finne ut. I en reformulert oppgave, der vi tillater et gitt antall spill, ville spørsmålet ha vært meningsfylt. Kommentarer fra leserne er velkomne.

Digresjon: Merk flere andre måter som EY kan fremkomme på:

- (1) $EY=EE(Y|X)=1/6 \cdot (20+19+18+17+16+15)/6=105/36$.
- (2) $EY=(5/6) \cdot EX=(5/6) \cdot (7/2)$
- (3) $EY=7/2 \cdot (1/6) \cdot (7/2)$

De to siste kan argumenteres for ved at oppnådd gevinst ved kast med rettferdig terning "nulles ut" hvis den matcher et nytt uavhengig kast med terningen.

Pusleri nr 10 (løsning med bidrag fra Terje Aven)

Terje Aven: Da jeg var vit.ass ved UiO for over 20 år siden og underviste Markov-kjeder hadde jeg moro av å regne ut sannsynligheten for YATZY ved n kast (og andre sannsynligheter som f.eks. liten og stor straight). Hvis X_n er antall like etter n kast er X_n er diskret Markov-kjede med overgangs-sannsynligheter gitt ved

	1	2	3	4	5
1	$120/6^4$	$900/6^4$	$250/6^4$	$25/6^4$	$1/6^4$
2	0	$120/6^3$	$80/6^3$	$15/6^3$	$1/6^3$
3	0	0	$25/6^2$	$10/6^2$	$1/6^2$
4	0	0	0	$5/6$	$1/6$
5	0	0	0	0	1

Dermed blir n -te overgangssannsynlighetene gitt ved $P(n) = C D^n C^{-1}$, der D er diagonalmatrisen av egenverdiene ($120/1296$, $120/216$, $25/36$, $5/6$, 1), og C er matrisen av egenvektorer. Dette gir at sannsynligheten for YATZY etter n kast er

$$p_{15}(n) = 22/2496 (120/1296)^n - 8/9 (120/216)^n + 265/78 (25/36)^n - 105/32 (1080/1296)^n + 1$$

som gir spesielt $p_{15}(n) = 0.0460286$.

Første n som gir større verdi enn 0.5 er $n=10$ (0.56). I vår tippebok som ble utgitt for noen år siden (Aven, Haukås, Løvås: Tipping, Lotto, og andre spill, Mortensens Forlag), laget vi en kurve som viste sannsynligheten for YATZY som funksjon av n .

Basert på Markov-kjeden finner en forventet tid til absorpsjon i tilstand 5 ved å sette opp et sett av ligninger, gitt at en starter i tilstand i . La u_i betegne forventet tid til absorpsjon i tilstand 5. Da er

$$\begin{aligned} u_1 &= 120/1296 u_1 + 900/1296 u_2 + 250/1296 u_3 + 25/1296 u_4 + 1 \\ u_2 &= 120/216 u_2 + 80/216 u_3 + 15/216 u_4 + 1 \\ u_3 &= 25/36 u_3 + 10/36 u_4 + 1 \\ u_4 &= 5/6 u_4 + 1 \end{aligned}$$

Forventet verdi blir $u_1=11.0902$.

[Pusleri nr. 11](#) (løsning)

Siden det er majoriteten som bestemmer utfallet, er det bare i situasjonene der de $2n$ splitter stemmene likt at stemmegivningen til den sovende personen får betydning. Dersom denne stemmer uavhengig av de andre, vil sannsynligheten for "riktig" beslutning da være p , mens dersom denne stemmer som sidemannen, for eksempel til høyre for seg, vil sannsynligheten være $\frac{1}{2}$. Dersom den sovende person oppgir sin uavhengighet og stemmer som sidemannen vil derfor sjansen for riktig beslutning være uendret når $p = \frac{1}{2}$, øke når $p < \frac{1}{2}$ og avta når $p > \frac{1}{2}$.

Pusleri nr. 12 (løsning)

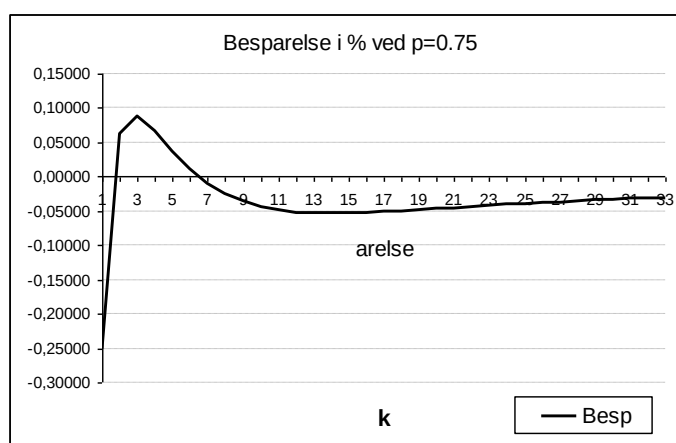
La p være sannsynligheten for at den enkelte vannkilde er ren. Ved n vannkilder og sammenblandinger fra k kilder, blir forventet antall tester som må gjøres lik

$$m_k = \frac{n}{k} (p^k + (1-p^k)(1+k)) = n \left(\frac{1}{k} + (1-p^k) \right)$$

Begrunnelse: Først utføres n/k analyser. For hver av disse er det sannsynlighet p^k for at ingen flere trengs og sannsynlighet $1-p^k$ for at ytterligere k analyser trengs. Forventet besparelse er derfor

$$f(k) = \frac{n - m_k}{n} = p^k - \frac{1}{k}$$

som selvfølgelig vokser med p , men ikke avhenger av n ! Vi skal for gitt p finne den k som gjør $f(k)$ størst mulig under forutsetning av at $f(k) > 0$. Dette er lett å implementere i Excel, med tilhørende aktiv link til figur av funksjonen der optimal k kan avleses:



Beregninger i Excel ga følgende tabell

p	0.60	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	0.99	0.999
k	1	3	3	3	3	4	5	10	32
f(k)	0%	0.1%	9%	14%	28%	40%	57%	80%	94%

En tabell som gir grensesannsynlighetene for ulike optimale batch-størrelser er.

k	1	3	4	5	6	7	8	9
p <	0.69335	0.875	0.934	0.959	0.972	0.979	0.984	0.987

Merk at $k=2$ aldri er optimalt!

Ser vi bort fra at k er heltall, kan vi gjøre følgende betraktning: For den kritiske verdi av p når det lønner seg å blande må vi ha $f(k)=0$ og $f'(k)=0$. Dette gir de to ligningene $p^k = 1/k$ og

$p^k \log(p) = -1/k^2$ som etter eliminasjon av p^k gir $\log(p) = -1/k$. Innsatt gir dette $k=e$ og dermed $p = e^{-1/e} \approx 0.6922$, dvs. noe lavere enn den eksakte (med fem desimaler) i tabellen.

[Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 13 (løsning)

Optimal strategi er (i) i tilfellet med forskjellig antall kort igjen av hver farge å gjette den som det er flest igjen av, og (ii) er det like mange igjen av hver farge røde, spiller det ingen rolle hva en gjetter. Følger en slavisk denne strategi er en faktisk sikret 26 riktige fra de skjevfordelte situasjonene uansett. Det gjenstår da bare å finne forventet antall korrekte gjetninger fra de likefordelte situasjonene, der vi har fifty-fifty sjanse for å gjette riktig.

La $P_{n,n}$ bety sannsynligheten for situasjonen med n kort av hver farge oppstår. Forventet antall ganger en likefordelt situasjon oppstår er da

$$EX = E\left(\sum_{n=1}^{26} I_n\right) = \sum_{n=1}^{26} P_{n,n}.$$

Anta rettfærdig stokking, dvs. at alle $m=52!$ ordninger av kortene er like sannsynlige. Vi har etter regelen om "gunstige på mulige":

$$P_{n,n} = \frac{\binom{26}{n} \binom{26}{n} 2n!(52-2n)!}{52!} = \frac{\binom{26}{n} \binom{26}{n}}{\binom{52}{2n}}$$

Argumentet for telleren er: Velg ut de n røde kort som skal være igjen, og de n sorte kort som skal være igjen. De $2n$ kortene kan ordnes på $2n!$ måter og de $(52-2n)$ kortene som allerede er borte kan ordnes på $(52-2n)!$ måter.

Svaret kan nok innses direkte, men resonnementet bør gå via nevnte antagelse.

Svaret på oppgaven blir derfor: $26 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{26} P_{n,n} = 30.040665.$

En annen tilnærming til oppgaven er ved rekursjon:

La $E(n,k)$ være forventet antall riktige gjetninger med r røde og s sorte kort igjen. Da har vi

$$E(r,s) = \frac{\max(r,s)}{r+s} + \frac{r}{r+s} E(r-1,s) + \frac{s}{r+s} E(r,s-1)$$

Programmering i Maple med randkravene $E(r,0)=r$ og $E(0,s)=s$ gir

$$E(26,26) = \frac{3\,724\,430\,600\,965\,475}{123\,979\,633\,237\,026}$$

Pusleri nr. 14 (løsning)

La p_k være sannsynligheten for at snilen i posisjon nr. k blir spist sist. Etter første skritt er en i en identisk situasjon der "vår" snile i posisjon nr. k har enten posisjon nr. $k-1$ eller $k+1$ i forhold til den situasjon som nå foreligger. Ved å betinge mhp første skritt har vi derfor differensligningen

$$p_k = \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{2}p_{k+1} \text{ for } k=2, \dots, n-1$$

med tilleggskravene $p_k = p_{n+1-k}$ for $k=1, 2, \dots, n$ (pga. symmetri) og sum lik 1. Den karakteristiske ligning $r^2 - 2r + 1 = 0$ har dobbeltroten $r=1$, som betyr at den generelle løsning av ligningen er

$$p_k = A + B \cdot k$$

Tilleggskravet medfører at $B=0$, slik at $p_k = A$, og dermed $p_k = 1/n$. Det spiller altså ingen rolle hvor en plasserer seg for å maksimere sannsynligheten for å leve lengst.

Lar vi E_k være forventet levetid for snilen i posisjon nr. k har vi

$$E_k = \frac{1}{2}(1+E_{k-1}) + \frac{1}{2}(1+E_{k+1}) = 1 + \frac{1}{2}E_{k-1} + \frac{1}{2}E_{k+1} \text{ for } k=2, \dots, n-1$$

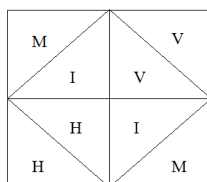
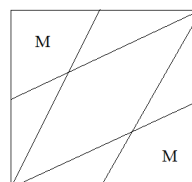
Med $E_0 = 0$ gjelder denne også for $k=1$. Tilleggskrav: $E_k = E_{n+1-k}$ for $k=1, 2, \dots, n$. Den generelle løsning er nå

$$E_k = E_k^* + A + B \cdot k$$

der E_k^* er en partikulær løsning av differensligningen. $E_k^* = k(n+1-k)$ er en slik. De to randkravene medfører imidlertid at $A=B=0$, slik at dette også er løsningen på vårt problem. Maksimering av denne gir som ventet at forventet levetid er størst i posisjonen(e) lengst vekk fra gåsen.

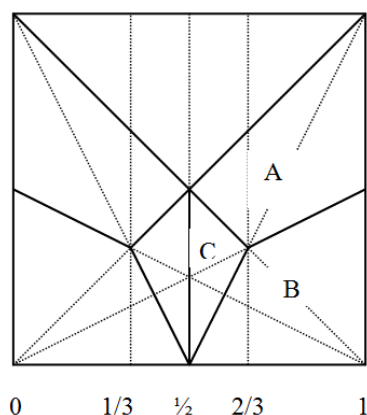
[Pusleri nr. 15 \(løsning\)](#)

Det enkleste er å betrakte problemet geometrisk, der posisjonen til de to treffpunktene er representert ved et punkt i enhetskvadratet, med uniform fordeling over dette, slik at sannsynligheter kan leses ut som arealer til områder. I figur a er representert følgende områder mht. pinnelengde større enn 0.5 : V=Venstre pinne, M=midtpinnen, H=Høyre pinne, I=ingen pinne. Vi ser at hver av de fire mulighetene har samme sannsynlighet $\frac{1}{4}$. I figur b er tilsvarende markert de to feltene der midtpinnen er størst, som til sammen utgjør $\frac{1}{3}$ av totalarealet, som dermed er den søkte sannsynlighet (som ventet?). Merk at de to skjæringspunktene $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ og $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ representerer like lange pinner og at forbindelseslinjen mellom disse er delelinjen for det gjenværende område mht. om venstre eller høyre pinne er lengst, som gir to femkanter.

Figur aFigur b

Pusleri nr. 16 (løsning)

Svaret er $2\ln(4/3)$. Flere tilnærminger fins. En mulighet er å klarlegge situasjonen geometrisk (jfr. pusleri nr. 15). I denne situasjon her ser figuren slik ut:



Her er den horisontale akse posisjonen av første hugg U_1 , og den vertikale akse posisjonen av annet hugg U_2 , som er uniformt fordelt gitt lengden av den lengste biten, dvs $\max(U_1, 1 - U_1)$. Av symmetrigrunner kan vi ta for oss høyre del av figuren, dvs. at venstrebiten etter første hugg er størst. Figuren kan deles i tre felter: A der venstrebiten etter siste hugg av lengde U_2 er størst og større enn den gjenliggende etter første hugg, B der høyrebit etter siste hugg av lengde $U_1 - U_2$ er størst og større enn den gjenliggende, og C der den gjenliggende bit av lengde $1 - U_1$ etter første hugg er større enn de to delte ved siste hugg. Strevsom integralregning over de gitte områder gir ledd som mirakuløst forsvinner i summen som forenkles til $\ln(4/3)$. Tilsvarende for venstre del av figuren, og dobling gir svaret. En enklere vei er utregning av forventning ved betinging: La X_i være lengde av lengste av de to bitene ved i'te hugg. Den lengste av de tre bitene etter annet hugg kan da skrives

$$X = X_2 \cdot I_{[X_2 > 1 - X_1]} + (1 - X_1) \cdot I_{[X_2 < 1 - X_1]}$$

Vi har da

$$E(X \mid X_1 = x) = E(X_2 \cdot I_{[X_2 > 1 - x]} \mid X_1 = x) + (1 - x) \cdot P(X_2 < 1 - x \mid X_1 = x)$$

Bruker en så at X_2 er Uniform $[x/2, x]$ betinget gitt $X_1 = x$ har en svaret med noe enklere integralregning enn ovenfor. Har noen en enda enklere, elegant løsning, som kanskje også er generaliserbar til mer enn tre biter?

[Pusleri nr. 17 \(løsning\)](#)

I situasjonen der spiller nr.1 ikke vet at spiller nr.2 titter, vil denne trekke på nytt dersom det første tallet er mindre enn 0.5. Dersom spiller nr.1 trekker på nytt, vil spiller nr.2 også gjøre det dersom dennes første tall er mindre enn 0.5. Spiller nr. 2 har $5/8$ sannsynlighet for å slå nr.1 når denne har trukket på nytt. Dersom spiller nr.1 ikke trekker på nytt, vet spiller nr.2 at spiller nr.1 sitt tall er minst lik 0.5, og at en derfor må sette grensen for å trekke på nytt noe høyere, la oss si ved a . Betinget gitt at spiller nr.1 ikke trekker på nytt vet spiller nr. 2 at spiller nr.1 sitt tall er uniformt fordelt $[0.5, 1]$. Anta at spiller nr.2 sitt første tall er på grensen a . Dersom hun trekker på nytt, er sannsynligheten for å vinne $1/4$, mens dersom hun ikke trekker på nytt er den $2(a - 1/2)$. På grensen må disse to sannsynlighetene være like slik at $2(a - 1/2) = 1/4$, dvs. $a = 5/8 = 0.5125$. Betinget gitt at spiller nr.1 ikke trekker på nytt, beregnes sannsynligheten for at spiller nr.2 vinner, ved å betinge mhp om spiller nr.2 sin første trekning er mindre enn eller større enn $5/8$, som $\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{64} = \left(\frac{5}{8}\right)^2$. Sannsynligheten for at spiller nr.2 vinner er derfor $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{64} = \frac{65}{128} = \frac{1}{2} + \frac{1}{128}$, dvs. ikke rare fordelten.

I situasjonen der spiller nr.1 vet at spiller nr.2 titter synes det opplagt at spiller nr. 1 nå vil sette en grense større enn 0.5 for hva en er fornøyd med. Analysen er imidlertid langt mer. Komplisert. Undertegnede ga opp etter en stund. og forela problemet til Terje Lensberg, kollega med spillteori som spesial. Han mente at problemet best angripes via begrepet Perfekt Bayesiansk Likevekt, og ga kjapt sin løsning, som fyller flere sider, og der sluttsvaret kom ut av en tredjegradsligning. Tallsvaret (med forbehold om regnefeil) ble at spiller nr. 1 beholder alt over 0.567, mens spiller nr.2 beholder sitt tall først når dette er minst 0.661 og spiller nr.1 har beholdt sitt.

Pusleri nr. 18 (løsning)

Med samme forventet utfall, må summen av øynene på hver terning være den samme. Betrakter vi de tre tallene som ikke skal være med på hver terning, må disse derfor også ha en felles sum. Det er da bare to muligheter, nemlig at de tre utvalgene av utelatte er:

Mulighet 1:	$A^c = \{3, 5, 7\}$	$B^c = \{2, 4, 9\}$	$C^c = \{1, 6, 8\}$
Mulighet 2:	$A^c = \{3, 4, 8\}$	$B^c = \{2, 6, 7\}$	$C^c = \{1, 5, 9\}$

dvs. mengdene med ingen felles tall og felles sum 15. Med ett felles tall ville hvert par av komplementer av seks tall ha fire tall felles, og de øvrige to i hvert par har en felles sum. Dette medfører at slike terninger er likeverdige (av de 36 utfall er 16 vinst, 16 tap og 4 uavgjort). For de ovennevnte muligheter er terningene derfor:

$A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$	$B = \{1, 3, 5, 6, 7, 8\}$	$C = \{2, 3, 4, 5, 7, 9\}$
$A = \{1, 2, 5, 6, 7, 9\}$	$B = \{1, 3, 4, 5, 8, 9\}$	$C = \{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$

Her er det tre felles tall i hver parvise sammenstilling, og opptelling gir

$$P(X_A > X_B) = 17/36 > 1/2$$

$$P(X_B > X_C) = 17/36 > 1/2$$

$$P(X_C > X_A) = 17/36 > 1/2$$

Pusleri nr. 19 (løsning)

For at oppgaven skal gi mening, må vi selvsagt forutsette ikke-negative variable.

Selv om $\text{var} S_n$ er proporsjonal med n , vil $\text{var} S_n^{1/2}$ ikke være proporsjonal med $n^{1/2}$, men faktisk holde seg begrenset, mens $\text{var} S_n^{1/4}$ vil gå mot null med n !

En begrunnelse kan like gjerne gå rett på $\text{var} S_n^r$ for $r \in [0, 1]$. For ikke-negative variable gjelder generelt at (bevis nedenfor):

$$\text{var } S^r \leq \frac{\text{var } S}{(ES)^{2(1-r)}}$$

Anvender vi dette på S_n får vi

$$\text{var } S_n^r \leq \frac{n\sigma^2}{(n\mu)^{2(1-r)}} = n^{-1+2r} \frac{\sigma^2}{\mu^{2(1-r)}}$$

For $r=1/2$ avhenger skranken ikke av n , mens for $r \in [0, 1/2]$ vil den gå mot null.

Bevis for ulikheten: For $t \geq 0$ gjelder at $|t^r - 1| \leq |t - 1|$ og følgelig $(t^r - 1)^2 \leq (t - 1)^2$.

For $a \geq 0$ og $b > 0$ gjelder derfor $((a/b)^r - 1)^2 \leq (a/b - 1)^2$ dvs. $(a^r - b^r)^2 \leq (a - b)^2 / b^{2(1-r)}$.

Vi får derfor

$$\text{var } S^r = E(S^r - ES^r) \leq E(S^r - (ES)^r)^2 \leq \frac{E(S - ES)^2}{(ES)^{2(1-r)}}$$

der første ulikhet følger av at forventning minimerer forventet kvadratisk tap.

(Ref: Jiri Anel: Mathematics of chance, Wiley 2001)

Pusleri nr. 20 (løsning)

(a) La X_n = utbetaling til spiller i n'te spill. Vi skal finne EX_n og betinger mhp beløp i potten etter foregående spill. La derfor Z_n = beløp i potten etter n'te spill. Vi har

$$E(X_n | Z_{n-1}) = \frac{1}{4}(Z_{n-1} + Z_{n-1}/2 - 1) \text{ som gir } E(X_n) = \frac{1}{4}(EZ_{n-1} + EZ_{n-1}/2 - 1) = \frac{3}{8}EZ_{n-1} - \frac{1}{4}.$$

$$\text{Nå er } E(Z_n | Z_{n-1}) = \frac{1}{4}(p + Z_{n-1} + Z_{n-1}/2 + Z_{n-1} + 1) \text{ som gir } E(Z_n) = \frac{5}{8}EZ_{n-1} + \frac{1}{4}(p+1).$$

$$\text{Med randkravet } EZ_0 = p \text{ gir dette } EZ_n = \frac{1}{3}((p-2)\left(\frac{5}{8}\right)^n + 2(p+1)).$$

Innsatt ovenfor får vi $E(X_n) = \frac{1}{8}(p-2)\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} + \frac{p}{4}$. For $p=2$ er forventningen uavhengig av n , mens den for $p>2$ er avtagende i n . Merk at $EX_1 = (3p-2)/2$ og at $EX_n \rightarrow p/4$.

(b) N =Antall spill til potten tømmes. Vi skal finne $EX_N = EE(X_N | N)$ der N er geometrisk fordelt. Vi

får tilsvarende ovenfor $E(X_N | N = n) = 2 + (p-2)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$, slik at

$$EX_N = E\left(2 + (p-2)\left(\frac{5}{6}\right)^{N-1}\right) = 2 + (p-2)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\frac{1}{4} = \frac{14}{12} + \frac{5}{12}p \quad (=2 \text{ for } p=2).$$

Pusleri nr. 21 (løsning)

Antar kjent at den momentgenererende funksjon $M(t) = Ee^{tX}$ (hvis den eksisterer) entydig bestemmer fordelingen og at $M^{(n)}(0) = EX^n$. I vårt tilfelle har vi

$$M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} M^{(n)}(0) \cdot \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{t^n}{n!} = t^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} = t^{-1}(e^t - 1) = \int_0^1 e^{tx} \cdot 1 dx = Ee^{tX}$$

Kommentar: At sekvensen av momenter ikke alltid entydig bestemmer fordelingen tør være velkjent, men ikke alle kjenner eksempler. Her er et:

La X være lognormal med tetthet $f(x)$, slik at $\ln X$ er standard normal, og la

Y ha tetthet $g(x) = f(x)(1 + \sin(2\pi \ln(x)))$ for $x > 0$. Da er $EX^n = EY^n = e^{n^2/2}$.

Her eksisterer ikke de momentgenererende funksjonene.

Pusleri nr. 22 (løsning med bidrag av Karl Ove Hufthammer)

La p være sannsynligheten for at tikronen ved et innkast kommer i retur sammen med brusflasken. Forventet inntekt for automateier ved et myntinnkast er da

$$E_1 = 10 \cdot (1 - p) + 0 \cdot p = 8 \text{ for } p=1/5.$$

La X være antall brusflasker som fås ut ved gjentatt bruk av eventuell returnert tikrone. Da er X geometrisk fordelt $(1-p)$ med forventning $E(X) = \frac{1}{1-p} = \frac{5}{4} = 1.25$.

La q være sannsynligheten for at innkast av tikronen gir en ekstra brusflasken. Forventet verdi av utlevert brus er da

$$E_2 = 8 \cdot (1 - q) + 16 \cdot q = 8 + 8 \cdot q = 10 \text{ for } q=1/4.$$

Med Y antall utleverte brusflasker ved et innkast blir $E(Y) = 1 \cdot (1 - q) + 2 \cdot q = 1 + q = 5/4$.

Vi ser at forventet antall mottatte brusflasker er lik for de to automatene, og at sannsynligheten for at begge skal få brus er større for automat 2 enn for automat 1, som imidlertid åpner for enda flere flasker, dersom man er heldig.

Betrakt isteden brukt pengebeløp (ti kroner) per mottatt brusflaske for kunden. Vi får disse forventningsverdier for hver av de to automatene

$$E\left(\frac{10}{X}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{10}{k} \cdot p^{k-1}(1-p) = -10 \cdot \frac{1-p}{p} \log(1-p) \approx 8.93$$
$$E\left(\frac{10}{Y}\right) = \frac{10}{1} \cdot (1-q) + \frac{10}{2} \cdot q = 10 \cdot (1 - \frac{q}{2}) = 8.75$$

Vi ser forventningen er litt lavere for automat 2 enn for automat 1. Automat 2 framtrer derfor som de rasjonelle valg for to tørste gutter ut fra begge kriterier. At begge forventninger er større enn 8 er ikke overraskende. Generelt gjelder nemlig at $E(1/X) > 1/E(X)$. Dersom en setter som krav at disse forventningsverdiene begge skal være 8 får vi følgende

$$E\left(\frac{10}{X}\right) = -10 \cdot \frac{1-p}{p} \log(1-p) = 8 \text{ for } p \approx 0.35$$
$$E\left(\frac{10}{Y}\right) = 10 \cdot (1 - \frac{q}{2}) = 8 \text{ for } q=0.40$$

Sannsynligheten for (minst) to brusflasker er fortsatt høyest for automat 2, men nå er forventet antall mottatte brusflasker størst for automat 1, nemlig

$$E(X) = \frac{1}{1-0.35} = 1.54 > E(Y) = 1 + 0.40 = 1.4.$$

Ifølge denne beregningen er det ikke like opplagt hvilken automat som bør velges. Videre ser vi at forventet inntekt for automateier fra en kunde med en tikroning ved automat 1 blir nå lik

$E_1 \approx 10 \cdot (1 - 0.35) = 6.5 < 8$, mens forventet verdi av utlevert brus til en kunde ved automat 2 lik $E_2 = 8 + 8 \cdot 0.4 = 11.2 > 10$. Automateieren vil neppe vil finne det rettferdig, og vil kunne hevde at selve kriteriet må være feil. Siden kunden er gitt en fordel i forhold en vanlig brusautomat, er det rimelig å måtte betale noe for denne fordel, men med de avledede høye p og q her blir fordelingen urimelig stor i forhold til innsatsen. Teoretisk sett er også dette kriteriet upraktisk. Det er vanskelig å presist formulere et rimelig krav til forventninger.

Automateieren og kunden har helt ulike perspektiver. Automateieren vil typisk være interessert i inntektene aggregert over tid, mens kunden er interessert i utfallet der og da. De to måter å formulere rettferdighetskriterier til bestemmelse av sannsynlighetene innebygget i automatene svarer på sett og vis til valget mellom aritmetisk og harmonisk gjennomsnitt for bestemmelse av resultat over tid, eller retttere sagt sekvens av kunder. Aritmetisk gjennomsnitt synes mest praktisk.

Gitt at 8 kroner er den riktige prisen i en brusautomat som gir returpenger ved innkast av ti kroner, vil betingelsen $E_1 = 8$ og $E_2 = 10$ satt innledningsvis være rimelig. Dette innebærer samtidig at tikronens skjebne kan uttrykkes ved forventede «brusverdier» som $E(8X) = E(8Y) = 10$. Automateieren drar fordel av de store talls lov, og får i det lange løp inntekt som en vanlig automat med returpenger. Kanskje tjener denne mer på grunn av mindre kostnader ved enklere konstruksjon av automaten og enklere rutine (og kanskje flere som får lyst å prøve å gamble litt). Kunden vil typisk gjøre en nyttebetraktning. Er nytten lineær i «brusverdi» er valget av automat likegyldig. Det er typisk ikke tilfelle for kunden her. Dersom begge guttene er desperat tørste, er det rimelig med en 0-1 nyttefunksjon, svarende til å maksimere sannsynligheten for at begge får en brus, altså velge automat 2. Dersom man også verdsetter muligheten for å glede flere med brus, vil automat 1 være mer aktuell.

[Innholdsliste](#)

[Pusleri nr. 23 \(løsning\)](#)

For uavhengige normalfordelte variable vet vi at $(X_1 - \bar{X}, X_2 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X})$ er uavhengig av $\bar{X}$, og dermed også ordningsobservatoren $(X_{(1)} - \bar{X}, X_{(2)} - \bar{X}, \dots, X_{(n)} - \bar{X})$ uavhengig av $\bar{X}$. Følgelig $\text{cov}(X_{(i)} - \bar{X}, \bar{X}) = \text{cov}(X_{(i)}, \bar{X}) - \text{cov}(\bar{X}, \bar{X}) = 0$, slik at $\text{cov}(X_{(i)}, \bar{X}) = \text{var}(\bar{X})$ for alle i .

Vi har derfor spesielt for medianen $\rho(M, \bar{X}) = \sigma(\bar{X}) / \sigma(M)$ (både for n jamn og odde).

For uavhengige standardnormalfordelte er* $\text{var}(M) \approx \pi / 2n$, slik at $\rho(M, \bar{X}) \approx \sqrt{2 / \pi} = 0.798$.

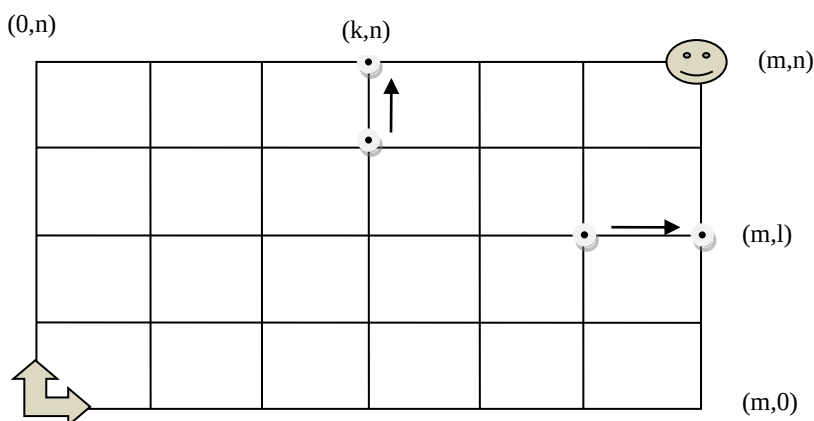
Uavhengigheten kan blant annet fås fra Basu's teorem, fordi $\bar{X}$ er suffisient for forventningen μ og $(X_1 - \bar{X}, X_2 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X})$ er ansillær (fordeling som ikke avhenger av μ). Jeg tenkte så at det samme må gjelde for enhver lokasjonsfamilie som kan karakteriseres slik, men fant ingen slik familie, og med god grunn skal vi tro Nils. Imidlertid har vi for den dobbel-eksponensielle fordeling med lokasjon μ at M er suffisient og $(X_1 - \bar{X}, X_2 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X})$ ansillær, som ifølge Basu gir uavhengighet. På samme vis som ovenfor får vi da $\rho(M, \bar{X}) = \sigma(M) / \sigma(\bar{X})$, med asymptotisk resultat $\rho(M, \bar{X}) \approx 1 / \sqrt{2} = 0.707$, som Nils har bekreftet.

* Se for eksempel Sverdrup: Lov og tilfeldighet Bind I, s.149

Nils Lid Hjort har gjort en dypere analyse av problemet. Hans bidrag finnes i Tilfeldig Gang April 2008.

Pusleri nr. 24 (løsning)

Du skal fra $(0,0)$ til (m,n) i diagrammet, og kan alltid skifte retning, uhindret uten stopp inntil du kommer til randen av byen i nord (k,n) eller i øst (m,l) .



Fra disse to punkter er forventet antall stopp henholdsvis $(m-k)/2$ og $(n-l)/2$. Vi betinger derfor mht. hvor en først treffer randen. Sannsynligheten for å treffe randen (k,n) langs en bestemt sti er opplagt $(1/2)^{n+k}$, og antall mulige stier av dette slaget som ikke treffer randen før, er

$$A(k,n) = \binom{k+n-1}{n-1}.$$

fordi dette må være lik antall mulige måter å komme til $(k, n-1)$ på, og derfra direkte til randen. Setningen om dobbeltforventning gir derfor forventningen lik

$$E(m,n) = \sum_{k=0}^{m-1} A(k,n) (1/2)^{n+k} (m-k)/2 + \sum_{l=0}^{n-1} A(m,l) (1/2)^{m+l} (n-l)/2$$

Tilfellet $m=n$ kan forenkles, og gir (tilnærmingen med Stirling's formel)

$$E(n,n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{n-1} (1/2)^{n+k-1} (n-k)/2 = n \binom{2n}{n} (1/2)^{2n} \approx \sqrt{\frac{n}{\pi}}$$

Summeringen krever litt omhu, med mindre man gjenkjenner følgende:

$$P(X = k) = \binom{n+k-1}{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-1} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

som en fordeling knyttet til myntkast og kjenner dens forventning. Gjør du?

Pusleri nr. 25 (løsning)

Betrakt valg av eske A eller B som binomiske forsøk, der A er suksess og suksesssannsynligheten er $\frac{1}{2}$. At eske A finnes tom for første gang samtidig som B inneholder k fyrstikker, er ekvivalent med $(n-k)$ fiaskoer før $(n+1)$ te suksess, dvs. at en har suksess i forsøk nummer $(n-k)+(n+1)=2n-k+1$, mens de øvrige n suksesser kan plasseres på $\binom{2n-k}{n}$ måter. Vi får derfor sannsynligheten

$$\binom{2n-k}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1-k}, \text{ og tilsvarende for at B finnes tom først. Vi får derfor}$$

$$P(X = k) = \binom{2n-k}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} \quad \text{for } k=0,1,\dots,n$$

De kumulative sannsynlighetene kan danne utgangspunkt for ulike betraktninger, eksempelvis med $n=50$ vil $P(X \leq 5) = 0.461605$, slik at det er mer enn 50% sjanse for mer enn 5 fyrstikker i den andre esken når den ene er tom

$$EX = \sum_{k=0}^n k \binom{2n-k}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}$$

Ved bytte av summasjonsvariabel ($j=n-k$, $i=j-1$), forkorting og velkjente kombinatoriske formler får vi

$$EX = \sum_{j=0}^n (n-j) \binom{n+j}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+j} = n - \sum_{j=0}^n j \binom{n+j}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+j}$$

$$= n - \sum_{j=1}^n (n+1) \binom{n+j}{j-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+j} = n - (n+1) \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1+i}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1+i}$$

Tas den siste summen fra 0 til $n+1$ må vi få 1 (følger av vår fordeling med $n+1$ istedenfor n). Innsettelse av 1 med fradrag av de to manglende ledd gir etter forenkling:

$$EX = (2n+1) \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - 1$$

For $n=50$ får vi $EX=7.03851$

Varianter av problemstillingen fins: Dersom en isteden spør etter antall i den andre esken når en for første gang tar siste fyrstikk i en eske, så er fordelingen

$$P(Y = k) = \binom{2n-k-1}{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k-1} \quad (k = 1, \dots, n) \quad \text{og} \quad EY = n \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$$

Merk også at $P(Y = n-k) = \binom{n+k-1}{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-1} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$ som dukket opp i pusleri nr. 24, og er sannsynlighetsfordelingen til antall av det motsatte utfall straks en har fått n suksesser eller n fiaskoer i binomiske forsøk. Her blir $Y' = n - Y$ som dermed gir EY' .

[Pusleri nr. 26 \(løsning\)](#)

Løsning: La Z_k og Z'_k være hhv siktepunkt og treffpunkt i skudd k . Anta at treffets tilfeldige avvik fra siktepunktet er X_k , der $EX_k = 0$ og $\text{var}X_k = \sigma^2$, samt at slike avvik er uavhengige. Dersom vi starter med å skyte mot blinken $Z_0 = 0$, har vi (sjekk selv konsekvensen av å ikke gjøre det):

	Siktepunkt Z_k	Treffpunkt $Z'_k = Z_k + X_k$	Avvik fra $Z_0 = 0$
1	$Z_k = 0$ for alle k	$Z'_k = Z_0 + X_k$	$EZ'_k = 0$ $\text{var}Z'_k = \sigma^2$
2	$Z_k = Z_{k-1} - Z'_{k-1}$	$Z'_k = Z_{k-1} - Z'_{k-1} + X_k$ $= Z_{k-1} - (Z_{k-1} + X_{k-1}) + X_k = -X_{k-1} + X_k$	$EZ'_k = 0$ $\text{var}Z'_k = 2\sigma^2$
3	$Z_k = -Z'_{k-1}$	$Z'_k = -Z'_{k-1} + X_k$ $= -(Z_{k-1} + X_{k-1}) + X_k + \dots$ $= X_k - X_{k-1} + X_{k-2} - \dots \pm X_1 \pm Z_0$	$EZ'_k = 0$ $\text{var}Z'_k = k\sigma^2 \rightarrow \infty$
4	$Z_k = Z'_{k-1}$	$Z'_k = Z'_{k-1} + X_k$ $= (Z_{k-1} + X_{k-1}) + X_k + \dots$ $= X_k + X_{k-1} + X_{k-2} + \dots + X_1 + Z_0$	$EZ'_k = 0$ $\text{var}Z'_k = k\sigma^2 \rightarrow \infty$

Strategi 2 svarer til å reagere på tilfeldige avvik som om de var systematiske, og må korrigeres for. Dette forekommer ofte i praksis og påfører bare systemet økt variasjon. Dette er sentralt i Deming's ledelsesteorier. Strategi 4 finner vi igjen når vil blander ny farge iht sist brukte malespann, og også i "hviskeleken".

Pusleri nr. 27 (løsning)

A og B vil alltid skyte på hverandre. C's beste strategi er derfor å skyte i luften inntil en av opponentene er eliminert. Han har da neste skudd, noe som vil gi han en stor fordel. A's sjanser kan lettest finnes slik: Siden C skyter i luften dersom han trekkes ut først, betrakt derfor første duell mellom A og B. På grunn av loddtrekningen er det like sannsynlig at det er A som B som da har revolveren. Vi får:

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{10}$$

Her svarer første ledd til at A har revolveren først av de to, og dermed eliminerer B, hvorefter C får revolveren og bommer, og annet ledd til at B har revolveren først av de to og bommer, men blir så eliminert, hvorefter C får revolveren og bommer. Videre får vi

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} + \dots \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \dots\right) = \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{8}{45} \end{aligned}$$

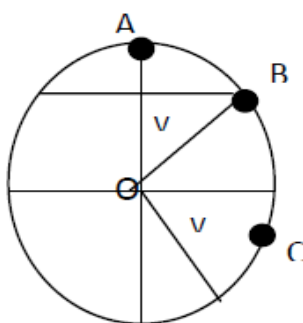
For å overleve må B få revolveren før A og så treffe A. Det er da et spørsmål om hvor lenge B og C bommer. Her svarer første ledd til at B har revolveren først og treffer A, mens C som da overtar revolveren bommer, hvorefter B så treffer C. I neste ledd går en runde til med bom for B og C osv. Dette gir at sannsynligheten for at C overlever er

$$P(C) = 1 - \frac{3}{10} - \frac{8}{45} = \frac{47}{90}$$

som er mer enn 50% sjanse!

[Pusleri nr. 28 \(løsning\)](#)

Vi kan, uten tap av generalitet, anta at A er fastlagt som Nordpolen. Vi har da to muligheter: (i) B og C faller begge på nordlig halvkule, som opplagt har sannsynlighet $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1/4$ og (ii) B og C faller på hver sin halvkule. I dette tilfelle er B bestemt ved vinkelen AOB, her kalt v .



Med sannsynlighet uniformt på kulen er det klart at sannsynlighetstettheten til denne vinkelen er $\sin v/2$ ($0 < v < \pi$). Tilfellet med B på nordlig halvkule med $0 < v < \pi/2$ er vist i snittfigur, der C i så fall må falle på kuleflate svarende til $v/2\pi$ av det totale areal (jfr. Den krumme siden av en appelsinbåt). Dette gir sannsynligheten

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin v \frac{v}{2\pi} dv = \frac{1}{4\pi}$$

Tilfellet med B på sørlig halvkule gir samme integralverdi, slik at søkte sannsynlighet blir $\frac{1}{4} + 1/2\pi$.

Pusleri nr. 29 (løsning)

Sannsynligheten for at en gitt person er sittende etter runde x er opplagt $1-(1/2)^x$. Derfor

$$P(X \leq x) = (1 - (\frac{1}{2})^x)^n$$

$$EX = \sum_{x=0}^{\infty} P(X > x) = \sum_{x=0}^{\infty} (1 - (1 - (\frac{1}{2})^x)^n) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^{i+1} \frac{1}{1 - (\frac{1}{2})^i}$$

der den endelige summen fås ved bruk av Newtons binomialformel og deretter bytte av summasjonsrekkefølgen. Beregninger gir:

n	1	2	10	100	1 000	10 000	100 000
EX	2	8/3=2.67	4.73	7.98	11.3	14.6	17.9

Kan hende strever din programvare å beregne dette for stor n , pga "store" binomiske koeffisienter eller at rekken konvergerer langsomt. Kan asymptotisk teori hjelpe oss?

Situasjonen kan betraktes som en forgreningsprosess, der asymptotisk teori gir oss at

$$EX \sim \ln(n)/\ln(2),$$

som forteller at forventningen vokser mot uendelig med n . Den asymptotiske formel gir imidlertid ikke særlig god tilnærming, selv for n av størrelsesorden 100 000. Et nærmere studium av rekken ovenfor, der denne tilnærmes med et integral, gir oss ulikhetene

$$\frac{S_n}{\ln 2} < EX < \frac{S_n}{\ln 2} + 1$$

der $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ er den harmoniske rekke. En heltallskorreksjon gir oss følgende asymptotiske formel

$$EX \sim S_n/\ln 2 + 0.5$$

som overraskende nok gir riktig resultat med fire desimaler, selv for n så liten som 10!

Pusleri nr. 30 (løsning)

Spørsmålsformuleringen samsvarer med tilbakeholding av informasjon. De mulige utfallene er beskrevet i figuren, der hver av de fire boksene svarer til kjønn for første og annet barn, hhv. GG, GJ, JG og JJ. De $2 \times 7 \times 2 \times 7 = 196$ mulige utfallene antas å være like sannsynlige. Vi ser at det er 27 mulige utfall med minst en gutt født på tirsdag (uthevet), hvorav 13 har begge gutter (krysset i øverste venstre boks). Gitt at minst et barn er gutt født på tirsdag, er sannsynligheten for at begge er gutter $13/196 : 27/196 = 13/27$.

Mer generelt, dersom tilleggsopplysningen som gis har sannsynlighet p , blir den søkte sannsynlighet lik $(2-p)/(4-p)$. Vi ser at $p=0$ gir $1/2$ og $p=1$ gir $2/3$. Det siste er løsningen på den tradisjonelle varianten av problemet med tilbakeholding av kjønnsinformasjon, og hvor et sikkert ekstra utsagn er verdiløst. Det første er grensetilfellet for svært spesifikk ekstra informasjon, eksempelvis "Jeg har to barn, og en er gutt født 13 april" eller enda nærmere grensen: "Jeg har to barn, og en er gutt som heter Magne". Slik sett vil det altså gjøre noe hvis vi bytter ut "13 april" med "29 februar" og "Magne" med "Tjostolf"!

G/G	Ma	Ti	On	To	Fr	Lø	Sø	G/J	Ma	Ti	On	To	Fr	Lø	Sø
Ma															
Ti															
On															
To															
Fr															
Lø															
Sø															
J/G	Ma	Ti	On	To	Fr	Lø	Sø	J/J	Ma	Ti	On	To	Fr	Lø	Sø
Ma															
Ti															
On															
To															
Fr															
Lø															
Sø															

I den alternative konteksten at den første vi møter i to-barns familien er gutt, må vi presisere om ekstraopplysningen er gitt som "Jeg har to barn og (minst) en er født på tirsdag" eller at den første vi møter er gutt, som på spørsmål om hvilken dag han er født, svarer han tirsdag. I det første tilfellet kan en utvide utfallsrommet til å registrere hvilket kjønn det påtrufne barn har. Vi får da to tablåer som ovenfor, det venstre for påtruffet gutt, det høyre for påtruffet jente. Antar vi at det er like sannsynlig at det er første som annet barn som påtreffes først, blir sannsynligheten for de ulike utfall gitt ved $1/196$ multiplisert med den angitte faktor i hver av de fire 7×7 cellene i hvert tablå. Nå blir den søkte sannsynlighet etter forkorting i teller og nevner lik $13/(13+7) = 13/20$.

G		J	
1	1/2	0	1/2
1/2	0	1/2	1

Dersom den gitte tilleggsopplysning har sannsynlighet p , blir den generelle formel $(2-p)/(3-p)$. Her ser vi at $p=0$ gir $2/3$, mens $p=1$ gir $1/2$. Det siste innebærer verdiløs tilleggsopplysning, og samsvarer med opprinnelige varianten av problemet, med den først påtrufne gutt, uten andre opplysninger.

Til slutt: I situasjonen der den første vi møter er gutt, og vi spør om hvilken dag han er født, er åpenbart sannsynligheten for at begge er gutter lik $1/2$ uansett guttens svar.

[Pusleri nr. 31 \(løsning\)](#)

La oppsettet for de fire kvartfinalene være (a_1, b_1) , (a_2, b_2) , (a_3, b_3) , (a_4, b_4) , der a betyr seedet og b useedet, og fotskrift er nummeret til gruppen/kampen. Anta at semifinalene er satt opp som (Vinner 1, Vinner 2) og (Vinner 3, Vinner 4). La $q=1-p$

- (a) Laget må vinne oppsatt kvartfinale og deretter vinne semifinalen, der en må betinge med hensyn på hva slags vinner (seedet eller useedet) som vinner den tilhørende oppsatte gruppe. Vi får

$$A_i = a_i \text{ kommer til finalen, } P(A_i) = p \cdot (p \cdot \frac{1}{2} + q \cdot p) = p^2(1+2q)/2 = r$$

$$B_i = b_i \text{ kommer til finalen, } P(B_i) = q \cdot (q \cdot \frac{1}{2} + p \cdot q) = q^2(1+2p)/2 = s.$$

La C_i = lag fra gruppe nr. i kommer til finalen, Da er $P(C_i) = P(A_i) + P(B_i) = r + s = 1/2$, som det bør være, siden vi har seks ("fire over to") mulige kombinasjoner av (kvartfinale)grupper for de to finalelag som må være like sannsynlige, og tre av disse har lag fra gruppe nr. i.

- (b) For å vinne turneringen må en komme til finalen og vinne denne, som krever betinging med hensyn til hva slags lag som blir motstander i finalen, seedet eller useedet. På grunn av oppsettet er det fire mulige motstandere, to av hvert slag. Vi får

$$A_i^* = a_i \text{ vinner turneringen } P(A_i^*) = r \cdot (r \cdot \frac{1}{2} + r \cdot \frac{1}{2} + s \cdot p + s \cdot p) = r \cdot (r + 2sp).$$

$$B_i^* = b_i \text{ vinner turneringen } P(B_i^*) = s \cdot (s \cdot \frac{1}{2} + s \cdot \frac{1}{2} + r \cdot q + r \cdot q) = s \cdot (s + 2rq).$$

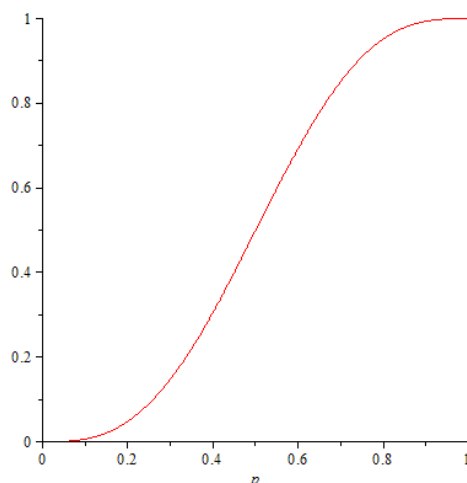
$$C_i^* = \text{lag fra gruppe nr. i vinner turneringen. Da er } P(C_i^*) = P(A_i^*) + P(B_i^*) = 1/4 \text{ (som sjekk)}$$

- (c) A = seedet lag i finalen $P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 4r - 4r^2 = 4r(1-r)$

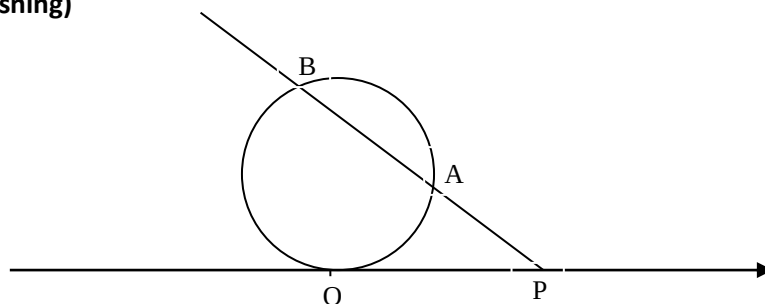
$$B = \text{useedet lag i finalen } P(B) = 4s - 4s^2 = 4s(1-s)$$

Dette beregnes ved summen av de fire $P(A_i) = r$ minus $P(A_i \cap A_j) = r^2$ for de fire tillatte kombinasjoner (der begivenhetene blir uavhengige), og tilsvarende for $P(B)$.

- (d) $A^* = \text{seedet lag vinner turneringen } P(A^*) = 4 \cdot P(A_i^*)$ pga. union av disjunkte begivenheter
 $B^* = \text{useedet lag vinner turneringen } P(B^*) = 4 \cdot P(B_i^*)$.



Sannsynligheten for at seeded lag vinner som funksjon av p

Pusleri nr. 32 (løsning)

Svar: Kjikvadratfordelt med en frihetsgrad!

Den geometriske setningen kalt "punkts potens" sier: Trekk en linje fra et gitt punkt som krysser en gitt sirkel. Da er produktet av avstanden fra punktet til de to krysningspunktene det samme uansett hvordan du trekker linjen. Dette gir oss grensetilfellet $PA \cdot PB = OP^2 = X^2$, dvs. kvadratet av en $N(0,1)$ variabel.

Løsningen avhenger selvfølgelig av at dine geometrikunnskaper er intakt, men beviset for "punkts potens" er enkelt (og fremdeles pensum i videregående skole): De to trekantene $\triangle OPA$ og $\triangle BPO$ er formlike (likedannede), siden de har en felles vinkel og de to periferivinklene $\angle POA$ og $\angle OBA$ fanger opp samme bue og dermed må være like (har du glemt det også, bevis det!). Vi har da $PA/PO = OP/BP$.

Merknad. Oppgaveformuleringens "tilfeldig" og betinget "gitt" var med hensikt for å villed: Konklusjonen krever ingen antakelse om tilfeldighet, og det kreves heller ingen hard regning.

Pusleri nr. 33 (løsning)

Det kan se ut som det ikke fins noen god strategi der en på forhånd har avtalt akkurat hvilke dører hver spiller skal åpne. Vi må altså lete etter en sekvensiell strategi som utnytter hva som skjer underveis. Er det mulig når vi ikke kan formidle informasjon mellom spillerene? Ja! Muligheten ligger i å lete etter strategi der utfallet for spillerene ikke er uavhengige, men positivt korrelerte, dvs. hvis en lykkes/mislykkes så er det også stor sjanse for at de andre lykkes/mislykkes.

Strategi: La skapene være nummerert fra 1 til 10, og at man enes om en nummerering av spillerne fra 1 til 10, f.eks i den rekkefølge de går inn. Spiller nr. i starter med å åpne skap nr. i. Spilleren noterer seg nummeret til den spiller bildet i skapet tilhører og åpner deretter skapet med dette nummeret. Spilleren fortsetter på samme måte til de 5 tillatte skap er åpnet.

La oss se på noen eksempler med plassering av bildenumre i de 10 skapene:

Skap nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Sykluser
Eks. 1	6	8	9	7	2	4	1	5	10	3	(6 4 7 1)(8 5 2)(9 10 3)
Eks.2	6	7	8	9	3	2	1	5	10	4	(6 2 7 1)(8 5 3)(9 10 4)
Eks.3	6	8	3	7	9	4	10	5	2	1	(6 4 7 10 1)(8 6 9 2)(3)
Eks.4	6	8	2	7	1	4	10	9	3	5	(6 4 7 10 5 1)(8 9 3 2)
Eks.5	6	8	9	7	1	4	10	2	3	5	(6 4 7 10 5 1)(8 2)(9 3)

I eksempel 1 ser vi at når spiller 1 åpner skap nr. 1 finner han bildet til spiller nr. 6. Når skap nr. 6 åpnes finner han spiller nr. 4, og når skap nr. 4 åpnes finner han spiller nr. 7 hvorefter han åpner skap nr. 7 og finner spiller nr. 1 som er han selv. Spiller nr. 1 lykkes altså. Spiller nr. 2 begynner med å åpne skap nr. 2 og finner spiller nr. 8, og åpnes skap nr. 8 finner han spiller nr. 5, og åpnes skap nr. 5 finner han nr.2, sitt eget bilde. Spiller nr 3 vil i sin tur finne spiller 9, 10 før han selv, nr. 3, dukker opp. Vi ser at hver spiller entydig tilhører en bestemt syklus. I Eksempel 1 var det akkurat tre sykluser som er listet i høyre kolonne i tabellen. Spiller nr. 4 vil oppleve samme syklus som spiller nr. 1 osv. Eksempel 2 har også tre sykluser, men her vil spiller nr. 2 se samme syklus som spiller nr. 1, før spiller nr. 3 og spiller nr. 4 møter de to andre syklusene. Vi skjønner nå at alle vil lykkes såfremt alle syklusene har høyst 5 elementer. Ovenfor vil en altså lykkes dersom plasseringene er som i eksemplene 1-3, og alle i den lange syklen på seks mislykkes i eksemplene 4 og 5.

Sannsynligheten for å mislykkes kan derfor beregnes som sannsynligheten for at det forekommer en sykel av minst seks elementer. Det er lett å vise at dette er lik

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \frac{1627}{2520} = 0.6456,$$

slik at den søkte sannsynlighet blir 0.3544.

Generelt: Med $2n$ spillere som hver får åpne n skap, er sannsynligheten for en m -sykel for $m > n$

$$\frac{\binom{2n}{m} \cdot (m-1)! \cdot (2n-m)!}{2n!} = \frac{1}{m}$$

Merk at summen fra $n+1$ til $2n$ som går mot $\ln(2)=0.6931$ når n går mot uendelig. Sannsynligheten er altså minst 0.3069 får å lykkes uansett hvor mange spillere det er!

Merknad: Problemstillingen tilskrives Peter Bro Miltersen, professor i computer science i Aarhus, som spredte den i sitt fagmiljø rundt 2003, og der kollegaen Sven Skyum bidro med denne overraskende vellykkede strategien.

[Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 34 (løsning)

Ventetiden til fullstendig samling må være lik summen en rekke geometrisk fordelte ventetider med avtagende suksessannsynligheter når en mynt man ikke hadde før mottas. Forventningen blir:

$$\frac{50}{50} + \frac{50}{49} + \dots + \frac{50}{1} = 50 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{50} \right) = 224.96$$

Forventet ventetid til Per også har sin samling komplett kan løses slik:

La m være antall ulike mynter Jenny har alene og n være antall ulike mynter Per har (og derfor begge har). Vi har da følgende overgangssannsynligheter:

$$\begin{aligned} (m, n) &\rightarrow (m, n) & n/50 \\ & & (m+1, n) & 1 - m/50 \\ & & (m, n+1) & (m-n)/50 \end{aligned}$$

La $f(m, n)$ være forventet antall flere mynter som trengs for full samling ved start i (m, n) . Da har vi

$$\begin{aligned} f(m, n) &= 1 + \frac{n}{50} f(m, n) + \left(1 - \frac{m}{50} \right) f(m+1, n) + \frac{m-n}{50} f(m, n+1) \text{ som gir} \\ f(m, n) &= \left(1 - \frac{n}{50} \right)^{-1} \left(1 + \left(1 - \frac{m}{50} \right) f(m+1, n) + \frac{m-n}{50} f(m, n+1) \right) \end{aligned}$$

Vi ønsker $f(0, 0)$, og har randkrav $f(m, 50) = 0$ og $f(50, n) = 50 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{50-n} \right)$.

Beregninger basert formelen ovenfor er enkel ved bruk av regneark og relativ adressering: La linjer og kolonner være henholdsvis (m, n) i omvendt rekkefølge fra 50 til 0. Etabler først marginalene i første kolonne og første linje i tabellen i henhold til randkravene ovenfor. Skriv formelen med relativ adressering i neste sør-østlige rute. Kopier formelen til hele trekanten. Da leser vi tallet $f(0, 0) = 324.80$ og $f(47, 34) = 197.08$, som besvarer de to siste spørsmålene.

Kommentar: I "gamle dager" ville en trolig forsøkt å løse den bivariate differensligningen ved å innføre generende funksjoner, og ende opp med en partiell differensialligning som trolig krever en numerisk løsning. Regneark som Excel muliggjør løsninger på mange problemstillinger uten å gå veien om en sluttet formel med tilhørende teknikaliteter. Dette bør ha en viss konsekvens for våre undervisningsopplegg, og reiser samtidig spørsmålene: Hva er en løsning? Når er et problem løst?

AZ52		fx = (1+(1-\$A52/50)*AZ51+(\$A52-AZ\$1)*AY52/50)/(1-AZ\$1/50)								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		50	49	48	47	46	45	44	43	42
2	50	0	50	75	91,66667	104,1667	114,1667	122,5	129,6429	135,8929
3	49	0	100	112,5	122,2222	130,2083	137	142,9167	148,1633	152,8795
4	48	0		137,5	143,9815	149,5949	154,5569	159,0102	163,0539	166,7603
5	47	0			160,6481	164,8582	168,6775	172,1772	175,4101	178,4164
6	46	0				177,3582	180,4136	183,256	185,9154	188,4159
7	45	0					190,4136	192,7822	195,0202	197,1425
8	44	0						201,1156	203,0339	204,8654
9	43	0							210,1767	211,7793
10	42	0								218,0293
									318,7373	318,9154
										320,0023
										320,1759
										320,3487
										320,5208
										320,6922
										321,2397
										321,4089
										321,5775
										321,7453
										322,2397
										322,4506
										322,6157
										322,7801
										323,2397
										323,6361
										323,7973
										324,7973

[Pusleri nr. 35 \(løsning\)](#)

Eksponensielt fordelt med forventning 2.

Argumentasjon: Ved å utvide den første situasjonen til fire dimensjoner får opplagt en uniform fordeling på den firedimensjonale kuleflaten. Den andre situasjonen er da representert som en projeksjon ned i to dimensjoner, dvs. fjerne koordinat 3 og 4, som gir en uniform fordeling på kuleskiven. Z er altså en sum av to kjikvadratfordelte variable med en frihetsgrad, og derfor eksponensiell med forventning 2.

Argumentet henger altså på at projeksjonen av en uniform kuleflate i n dimensjoner er uniform i "det indre" av det projiserte område til dimensjon $n-2$. Dette er et generelt resultat som var kjent for Arkimedes i tilfellet $n=3$, i forbindelse med hans arbeid med å bestemme arealet av kuleflaten. Med han på laget finner dere sikkert ut at det også gjelder for $n=4$. Merk at uniformitet ikke oppnås med å gå kun en dimensjon ned.

Referanse: Letac: Integration and Probability, Springer (1995) s. 92-93 eller hans notat "From Archimedes to statistics: the area of the sphere", lett tilgjengelig fra nettadressen <http://www.math.univ-toulouse.fr/~letac/Archimede.pdf>

[Pusleri nr. 36 \(løsning\)](#)

Anta uten tap av generalitet at plassene på balkong er nummerert fra 1 til n , og at publikum slipper inn i denne rekkefølge i henhold til billetten. For hver som slipper inn holder vi rede på om denne, i henhold til billetten, inntar sin tildelte plass, person nr. 1 sin plass, person nr. n sin plass eller en annens plass.

Vi merker oss at det hele er avgjort straks plass nr. n er besatt, men også straks plass nr. 1 er besatt, idet dette innebærer at denne personen har byttet plass med nr. 1, og dermed åpner for at alle etterfølgende finner sin egen plass. Vi åpner døren og person nr. 1, som roter det hele til, velger plass nr. 1 og plass nr. n med like store sannsynligheter $1/n$. Velges en av disse er det hele avgjort. Hvis ikke, vil person nr. 2 enten finne sin plass ledig og innta den, eller dersom den ikke er ledig, vil det igjen være like stor sjanse, nå $1/(n-1)$, for at plass nr. 1 og plass nr. n velges, og det endelige utfall gitt. Slik vil det være for hver etterfølgende publikummer inntil den nest siste. Vi innser at, for de som finner sin egen plass ledig og setter seg der, kan vi gå videre og slippe neste inn, uten at dette har noen konsekvenser for den søkte sannsynlighet. Når den som ikke finner sin egen plass ledig velger en plass forskjellig fra nr. 1 og nr. n og setter seg der, vil den neste som slippes inn møte samme situasjon som den forrige, men med et ledig sete mindre. Vi kan fortsette dette inntil person nr. $n-1$, som nødvendigvis står overfor to ledige seter, nemlig nr. 1 og nr. n , som igjen velges med like store sannsynligheter, nå $\frac{1}{2}$, som derfor også gir siste person nr. n som slippes inn sannsynlighet $\frac{1}{2}$ for å få sin egen plass. Den sekvensielle argumentasjonen ovenfor med utfall uten konsekvens og like sannsynligheter for de to alternativene godtgjør at også sannsynligheten før døren åpnes er $\frac{1}{2}$ for at den siste får sin plass i henhold til billetten.

Ved samme argumentasjon følger det at person nr. k har sannsynlighet $(n-k+1)/(n-k+2)$ for å finne sin egen plass ledig ($k > 1$).

[Pusleri nr. 37 \(løsning\)](#)

Hver av dem står overfor åtte mulige arrangementer av de to fargene, men har bare delvis informasjon. Nummererer vi arrangementene for Ole, Dole og Doffen i denne rekkefølge er disse BBB, BBG, BGB, GBB, GGB, GBG, BGG, GGG. Doffen innser at for hvert arrangement der han gjetter rett, finnes et arrangement der han gjetter feil med den samme tilgjengelige informasjon, Når han eksempelvis ser GGx, er det to muligheter GGG og GGB, hvorav det ene er rett og det andre feil. Det dermed er umulig å oppnå full sikkerhet for å lykkes. Doffen får det for seg at det må være mulig å finne en strategi der alle tar feil på det samme arrangementet, noe som kan åpne for at det blir gjettet riktig på de andre arrangementene. For å ha størst mulig sjanse for at det skjer, er det kanskje lurt å sikre at det kun er en som gjetter på disse arrangementene. Følgende strategi oppnår dette:

Dersom du ser to hjelmer med lik farge, gjettt at du selv har motsatt farge av hva du ser.

Dersom du ser to hjelmer med ulik farge si Pass.

Arrang.	BBB	BBG	BGB	GBB	BGG	GBG	GGB	GGG
Gjetninger	GGG	PPG	PGP	GPP	BPP	PBP	PPB	BBB
Utfall	Taper	Vinner	Vinner	Vinner	Vinner	Vinner	Vinner	Taper

Vi vinner altså i seks av de åtte utfallene. Dette gir sjansen $6/8$ dvs 75% sjanse for å vinne. Bedre er det ikke mulig å gjøre det!

Det er interessant å se hva som skjer når flere personer enn tre deltar. Intuitivt bør sjansen for å lykkes øke, idet mer informasjon utveksles, i hvert fall så lenge en finner optimale strategier der arrangementene innebærer at bare en person gjetter. Allerede for $n=4$ blir problemstillingen ugrei (forsøk selv!), og det ser det ut til at det ikke er mulig å oppnå mer enn 75% sjanse, og at en like gjerne kan bestemme seg for ignorere fjerdemann. Problemstillingen kan imidlertid formuleres innen rammen av kodeteori, og det viser seg at tilfeller der $n=2^k-1$ er greie, i den forstand at det fins «perfekte» koder som beskriver den optimale strategien med sannsynlighet $(2^k-1)/2^k$ for å lykkes. Eksempelvis er den optimale strategien for tilfellet $n=7$ ekvivalent med den såkalte Hamming(7,4)-koden, som er velkjent innen teorien for feilkorrigerende koder. Den gir sjansen $112/128=7/8=87.5\%$ for å lykkes, og kan beskrives slik:

Betrakt alle mønstre som passer med følgende to BBBBBB, BBGBGGG, med tillegg av alle mønstre som fås ved rotasjon og komplement, som gir 16 mønstre i alt, Dvs. at man ikke gjør forskjell på fargen, og startpunkt for nummereringen hvis man står i sirkel. Dersom det du ser samsvarer med et av disse 16 mønstre, gjettt det motsatte av det som står på din plass i mønstret. Dersom det du ser ikke samsvarer med et av disse 16 mønstre, si Pass.

Optimale strategier for tilfellene $n=5$ og $n=6$ er mer kompliserte, men for $n=6$ kan oppnås $25/32=78\%$ sjanse (Taussky & Todd, 1948) og for $n=6$ kan oppnås $52/64=81\%$ (Staunton & Kalbfleisch, 1968). Hva som er mulig å få til er beskrevet innen området «covering codes», som er beslektet med feltet «sphere packings». Lignende problemer har også vi i forbindelse med fotball-tipping, nemlig ved konstruksjon av skjemaer som gir minimumsgarantier for gevinst, gitt at et antall såkalte «sikre» kamper er valgt rett.

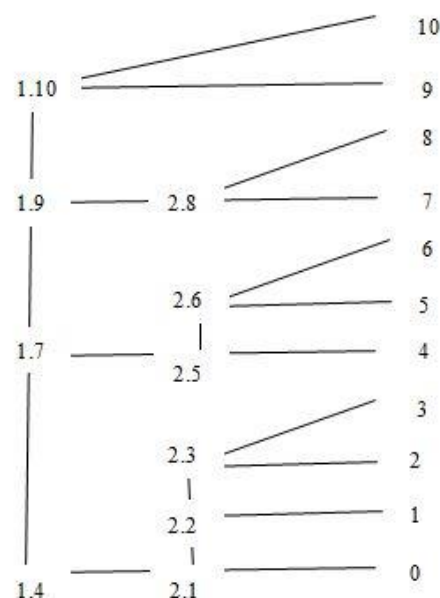
Hatte-problemer fins i mange varianter, både kompetitive og kooperative, se Brown & Tanton: A Dozen Hat problems, Math Horizons, April 2009. Versjonen ovenfor tilskrives Todd Ebert i Ph.D thesis University of California, Santa Barbara, 1998.

En takk til Per Manne som har bidratt til klargjøring av løsningen.

Pusleri nr. 38 (løsning)

Svaret er: Helt til topps!

Begrunnelse: Dersom man hadde bare ett egg, er det opplagt at man må starte i 1'te etasje, og gå oppover en etasje av gangen, så lenge egget ikke er knust, og med fire tillatte slipp kan vi avklare helt opp til 4de etasje. Med to egg vil det være optimalt å la første slipp gå fra 4de etasje. Dersom det knuser, har man et egg igjen som kan brukes til å avklare de tre etasjene under etter samme prinsipp som ovenfor. Dersom det første egget ikke knuses fra 4de etasje, brukes det på nytt fra 7de etasje. Dersom det knuses, har man to slipp igjen, og kan avklare hvilken av etasjene 5 og 6 det knuses med det andre egget. Dersom det første egget heller ikke knuses fra 7de etasje, hentes det opp og slippes fra 9de etasje, og dersom det knuses har vi ett slipp igjen, og kan bruke det andre egget til å slippe fra 8de etasje. Dersom det første egget ikke knuses fra 9de etasje, kan vi gjøre et siste slipp i 10de etasje. De mulige hendelsesforløp er her illustrert i et tre der sifrene ved hver splittnode er (eggnummer.etasjenummer).



Dersom det var en skyskraper og en spør om hvor langt opp en kan avklare med to egg og n tillatte slipp, er det klart at det er optimalt å slippe første egg fra n'te etasje, og så følge samme prinsipp som ovenfor. En vil da kunne nå opp til etasje $1+2+3+\dots+n=n(n+1)/2$, slik at $n=20$ gir etasje nr. 210.

Problemstillingen kan generaliseres til m egg og n slipp, og blir da straks noe mer komplisert. En løsning er gitt av Boardman, Mathematics Magazine, vol. 70, no.5, 368-372, som gir en rekursjonsformel med n og m og en løsning ved hjelp av genererende funksjoner. Vi har imidlertid fått en mer instruktiv løsning fra Jarle Tufto (NTNU) som bygger på at treet ovenfor er et såkalt binært søketre, som er en velkjent byggestein for diverse kompliserte datastrukturer. Dette innebærer at splittnodene i treet kan entydig nummereres på en slik måte at ved enhver slik node har nodene i venstre undertre (her opp) høyere numre og nodene i høyre undertre lavere numre, og denne egenskapen skal gjelde rekursivt for alle nye undertrær. I treet ovenfor svarer denne nummeringen til etasjen egget slippes fra, dvs annet siffer. Jarles generelle argumentasjon går slik: Den maksimale dybden til forgreninger i dette treet blir lik maksimalt antall tillatte kast n. Men treet blir skjevt fordi vi kun kan ha m negative utfall i hver forgrening av treet, idet vi har kun m egg til rådighet og knuste egg kan ikke slippes på nytt. Når vi kommer til enden av en bestemt forgrening (et «blad») gjør vi vår beslutning. Totalt antall etasjer som kan bestemmes (inkludert 0. etasje) blir derfor lik antall blad på treet. Den generelle løsningen for antall etasjer som funksjon av n og m (om vi altså teller med 0. etasje) blir

$$f(n, m) = \sum_{i=0}^m \binom{n}{i} \quad (1)$$

Dette kan vises ved følgende kombinatoriske argument. Hver forgrening i treet vil inneholde opptil m negative utfall (knuste egg). Ser vi på antall forgreninger som inneholder et gitt antall i negative utfall $i \leq m$, $i=0,1,\dots,m$, kan disse forgreningene dannes på tilsammen $\binom{n}{i}$ måter avhengig av når i løpet av de potensielt totalt n kastene de negative utfallene inntreffer. At vi for eksempel kun gjennomfører to kast dersom de negative utfallene inntreffer i de to første kastene endrer ikke på

dette argumentet. Summerer vi antall forgreninger gitt $i = 0, 1, \dots, m$ negative utfall kommer vi fram til (1).

Alternativt kan løsningen bevises ved induksjon. Etthvert tre består av to undertrær på en slik måte at

$$f(n, m) = f(n-1, m) + f(n-1, m-1) \quad (2)$$

Videre ser vi at antall blad når vi har ingen kast eller ingen egg igjen blir 1, slik at vi får randbetingelsene $f(0, m) = 1$ for $m = 1, 2, \dots$ og $f(n, 0) = 1$ for $n = 1, 2, \dots$. Bruker vi konvensjonen at $\binom{n}{i} = 0$ for $i < 0$ og $i > n$, ser vi at (1) også gjelder på randen for $m = 0$ eller $n = 0$. Anta at (1) gjelder for $(n-1, m)$ og $(n-1, m-1)$. Fra (2) følger da

$$\begin{aligned} f(n, m) &= f(n-1, m) + f(n-1, m-1) \\ &= \sum_{i=0}^m \binom{n-1}{i} + \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n-1}{i} \\ &= \sum_{i=0}^m \left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right] = \sum_{i=0}^m \binom{n}{i} \end{aligned}$$

Tredje overgang framkommer ved å forskyve summasjonsvariabelen i den andre summen og ved å utvide denne med leddet $\binom{n-1}{0-1} = 0$. Siste overgang følger da av addisjonsformelen for binomialkoeffisienten kjent fra Pascals trekant. Dermed må (1) gjelde for alle n og m .

For $n = 4$ og $m = 2$ som i oppgaven får vi $f(4, 2) = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 11$ blad, som svarer til at vi kan sortere ut sikker konklusjon for etasje 0 til og med 10.

[Innholdsliste](#)

[Pusleri nr. 39 \(løsning\)](#)

Ulike løsninger basert på rekursjoner eller basert på egenskaper ved ordningsobservatoren er mulig, men man kan ganske enkelt resonnerer slik: La $I_k = 1$ dersom bil nr. k leder en gruppe (av en eller flere biler) og 0 dersom bil nr. k er ikke-ledende i en kolonne av to eller flere biler. Siden det er like mange grupper som ledere av grupper, søker vi forventningen til $S = I_1 + I_2 + \dots + I_n$. Nå vil bil nr. k lede en gruppe hvis og bare hvis den er den mest saktekjørende av de k første bilene, som skjer med sannsynlighet $1/k$. Følgelig er $E(I_k) = P(I_k = 1) = 1/k$, og derfor blir $E(S) = E(I_1 + I_2 + \dots + I_n) = E(I_1) + E(I_2) + \dots + E(I_n) = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n$.

Pusleri nr. 40 (løsning)

Gitt antall krysninger n_i i intervallet $[0, t]$ er tidspunktene uniformt fordelt $[0, t]$. Da blir

$$(a) \quad P(A|n_2 \text{ i } [0, t]) = (a_1 + a_2) \cdot \frac{n_2}{t}$$

$$P(A) = (a_1 + a_2) \cdot \frac{2\lambda_2 t}{t} = 2\lambda_2(a_1 + a_2)$$

$$(b) \quad E(N|n_1 \text{ \& } n_2 \text{ i } [0, t]) = (a_1 + a_2) \cdot \frac{n_1 n_2}{t}$$

$$E(N) = (a_1 + a_2) \cdot \frac{(2\lambda_1 t)(2\lambda_2 t)}{t} = 4\lambda_1 \lambda_2 (a_1 + a_2)t$$

Som ikke uventet gir forventet antall kollisjoner pr tidsenhet lik $4\lambda_1 \lambda_2 (a_1 + a_2)$.

Ved ulik fart erstatt $a_1 + a_2$ med $a_1 \frac{v_2}{v_1} + a_2$ i (a) og $\max(a_1 \frac{v_2}{v_1} + a_2, a_1 + \frac{v_1}{v_2} a_2)$ i (b)

Pusleri nr. 41 (løsning)

Løsningen bygger på at, gitt at alle kastene er ulike, så er alle 6! ordninger av utfallene like sannsynlige. Ulempen med denne løsningen er at vi risikerer å holde på ganske lenge. En «raskere» løsning er:

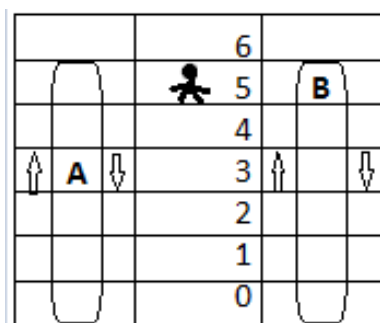
Navngi de seks sidene på terningen med bokstavene A, B, C, D, E, F. Resultatet av et antall terningkast danner da et «ord». Ulike ord kan da ordnes leksikografisk.

1. Start med å trille terningen tre ganger, og noter ordet. Er vi heldige er det tre ulike bokstaver i ordet, f.eks ECA. Dette er et av i alt seks ulike ord som som fås ved permutasjoner av de tre bokstavene, i leksikografisk rekkefølge er disse ACE, AEC, CAE, CEA, EAC, ECA. Disse seks ordene må være like sannsynlige. Hvis vi på forhånd har fastlagt at ordets plass i rekkefølgen bestemmer utfallet 1,2,3,4,5 eller 6. Siden vi fikk ECA, som kommer leksikografisk sist, har vi fått utfallet «6 øyne» simulert med sannsynlighet 1/6. Dette gjelder uansett hvilke tre ulike bokstaver ordet består av.
2. Er vi mindre heldige får vi et ord med tre like bokstaver, f.eks AAA. Dette gir ingen informasjon, og vi starter på nytt med tre nye kast.
3. Er vi sånn passe heldige, får vi et ord med to like bokstaver, f.eks CAA. Dette er ett av i alt tre ulike ord, i leksikografisk rekkefølge AAC, ACA, CAA, som må være like sannsynlige. På forhånd har vi bestemt at ordets plass i rekkefølgen peker på en av de tre mengdene {1 øyne, 2 øyne}, {3 øyne, 4 øyne}, {5 øyne, 6 øyne}. Når vi fikk ordet CAA betyr det at utfallet er i den siste mengden, altså 5 eller 6 øyne. Alt vi nå trenger, er en rettferdig trekning for hvilken av de to i den aktuelle mengden som skal velges. Dette kan skje ved to nye terningkast, med resultat f.eks FE. Dette er et av to mulige ord, i leksikografisk rekkefølge, EF, FE, som er like sannsynlige. At vi fikk den siste i rekkefølgen FE betyr det at vi velger den siste i vår mengde, altså 6 øyne. Dersom de to terningkastene skulle vise likt resultat, overser vi det, forsøker med to nye kast og følger samme rutine.

Det er forholdsvis liten sjanse for at vi trenger mange skjeve kast for å simulere et enkelt rettferdig kast. Det er ikke vanskelig å beregne forventet antall nødvendige kast dersom terningen i virkeligheten er rettferdig (selv om den ser rar ut). Den er $144/35=4.114$. Det er mulig å oppnå enda lavere forventning ved å kombinere informasjonen fra de to trinnene. En variant gir forventning 4.09, og det fins tabellariske løsninger med forventning ca. 3.60.

Pusleri nr. 42 (løsning)

Med en heis er opplagt svaret $1/6$, og påberoper vi uavhengighet får vi at sannsynligheten for at minst en går ned er $1/6 + 1/6 - 1/6 \cdot 1/6 = 11/36$. Vel er begivenhetene «A kommer ned» og «B kommer ned» uavhengige, men vi trenger de disjunkte begivenhetene «A kommer først og går ned» og «B kommer først og går ned». Et kjapt resonnement tar utgangspunkt i figuren, der tallene representerer gulvnivåer: Skal A komme først og gå ned, må A være mellom 5 og 6 på opptur eller nedtur, samtidig som B holder seg unna et like stort område. Tilsvarende for B. Med antakelsen om uavhengighet mellom heis A og heis B blir den søkte sannsynlighet $1/6 \cdot 5/6 + 1/6 \cdot 5/6 = 10/36 = 5/18$. Det området B må holde seg unna er posisjoner på nedtur mellom 6 og 5 foran A eller posisjoner på opptur mellom 3 og 5, tilstrekkelig nær 5, slik at B når nivå 5 på opptur før A har nådd 5 på nedtur. Tilsammen utgjør det $2/12 = 1/6$ av syklusen.



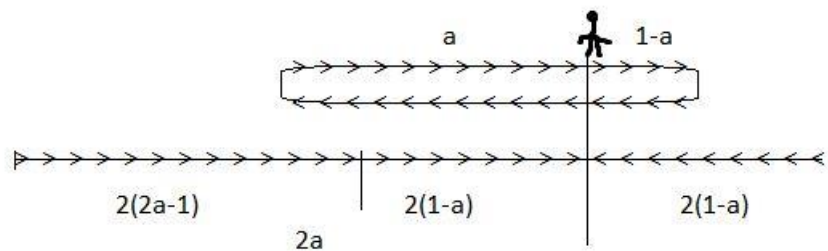
Løsningen ovenfor har den svakhet at den ikke lar seg lett utvide til mer enn to heiser. Eksempelvis med tre heiser nytter det ikke å argumentere at vi nå får tre ledd med $(5/6)^2$ istedenfor $5/6$, idet vi i den betingede kontekst, gitt en bestemt heis kommer først og ned, ikke lenger har uavhengighet for de to andre heisenes plassering.

Problemstillingen tilskrives Gamov & Stern (1958), med løsning som senere ble korrigert av D. Knuth (1968). Han gir en komplisert løsning (med integraler og rekursjoner) og en enkel geometrisk løsning. Her følger to nye løsninger, en analytisk og en geometrisk.

Løsning (Lillestøl): Betrakt heisposisjonen X i intervallet $[0, 2)$, der 0 representerer bunn og 1 topp. Hansens høyde over bakken er $a = 5/6$, representert ved heisposisjonene a (opptur) og $2-a$ (nedtur). En gunstig situasjon for Hansen er en heis i posisjon x i intervallet $(a, 2-a)$, ingen heis i intervallet $(x, 2-a)$, ingen i intervallet $(x-2, a)$, dvs. tilsammen ingen i område av lengde $2(2-a-x)$ og $n-1$ heiser hvor som helst ellers, dvs i område av lengde $2(a+x-1)$. Sannsynligheten for X i $(x, x+dx)$ er da trinomisk fordelt, slik at tettheten til X er gitt ved $f(x)dx = n (2(2-a-x))^{n-1} (2(a+x-1))^{n-1} (1/2)dx$, dvs. $f(x) = n(a+x-1)^{n-1}$. Integreres dette fra a til $2-a$ får vi $(1-(2a-1)^n)/2$. For $a=5/6$ blir dette $1/2 \cdot (1-(2/3)^n)$ og med $n=2$ blir dette $5/18$, som ovenfor.

En annen løsning følger på neste side...

Løsning (Per Manne): Løkken i figuren nedenfor illustrerer heisen fra bunn (0) til topp (1) og ned igjen, der Hansen står på nivå $a=5/6$. Klipp opp løkken der Hansen står, brett ut, og rett pilene slik at de samsvarer med hvordan heisene nærmer seg Hansen. Når Hansen passerer «hopper» heisen til motsatt enda og nærmer seg Hansen på nytt derfra.



Utbrettet har vi et linjestykke av lengde 2, delt i tre områder: venstre(V), midt (M) og høyre (H) med lengder henholdsvis $2(2a-1)$, $2(1-a)$, $2(1-a)$. Det gunstige for Hansen er minst en heis i område H, samtidig som ingen heis er nærmere i område M. Med antakelsen om at n heiser er plassert som n uavhengige rektangulærfordelte $[0,2]$ variable blir sannsynligheten

$P(\text{minst en heis i område M eller H}) = 1 - P(\text{alle heisene i område V}) = 1 - (2a-1)^n$.

Gitt minst en heis i området (M eller H) er det på grunn av symmetrien like sannsynlig at den eller den første av flere kommer i M (opp) som i H (ned). Den søkte sannsynlighet er altså $1/2 \cdot (1 - (2a-1)^n)$.

[Innholdsliste](#)

[Pusleri nr. 43 \(Løsning\)](#)

Den går like greit med 2^n lag over n runder med $K=1+2+4+\dots+2^{n-1}=2^n-1$ kamper. Nummerér kampene etter et fritt valgt prinsipp, slik at den totale gevinst er $G=G_1+G_2+\dots+G_K$.

Betrakt kamp nr. k svarende til runde $r=r(k)$ med gevinst $G_k=2^{r(k)-1} \cdot I_k$, der

$I_k = 1$ (0) dersom utfallet av kamp nr. k er tippet riktig (feil)

For å tippe riktig vinner av kamp nr. k i runde $r(k)$ må også alle kampene som involverer dette laget i rundene før være riktig tippet. Vi får derfor

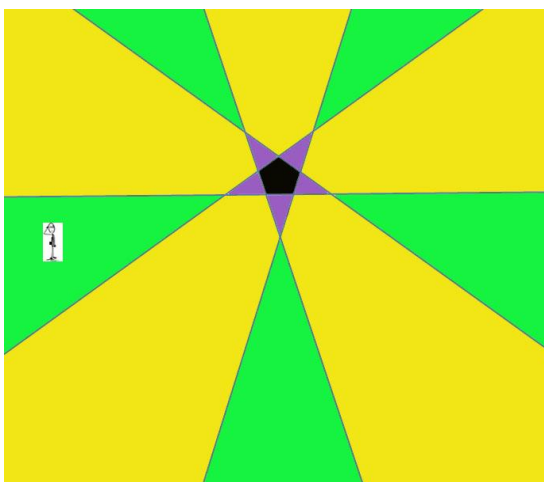
$E(I_k) = P(I_k=1) = 1/2^{r(k)}$, slik at $E(G_k) = 2^{r(k)-1} \cdot E(I_k) = 2^{r(k)-1} \cdot (1/2^{r(k)}) = 1/2$ uansett k . Derfor blir

$$E(G) = E(G_1 + G_2 + \dots + G_K) = E(G_1) + E(G_2) + \dots + E(G_K) = K \cdot (1/2) = (2^n - 1)/2$$

For $n=5$ gir dette $E(G)=15.5$.

Pusleri nr. 44 (løsning)

I figuren nedenfor er trukket linjer i forlengelsen av sidene i femkanten, og fra de gule områdene sees to sider av bygningen og fra de grønne områdene tre sider. Vi ser at planet er dekket av 10 vinkelsektorer, hver på 36° , fem grønne og fem gule. De gule overlapper innen stjernen, som vi betrakter som liten. Det er gitt at Per er i det grønne eller i det gule området, som vi derfor betrakter tilnærmet like store, slik at sannsynligheten for at Per ser akkurat tre sider er tilnærmet $\frac{1}{2}$.



Bonusspørsmålet: Av Per sitt utsagn kan vi slutte at han befant seg i grønt område med kurs mot bygningen til han har nådd en av stjernespissene. Ut fra bemerkningen om blendet av morgensol, kan vi slutte at han må ha kommet inn fra vest, og ut fra oppgitt sidelengde 314 meter på bygningen regnes lett ut at avstanden fra bygningen er 483 meter. Av et kart over Washington ser vi at figuren må dreies ørlite med urviserne, og at Per trolig må befinne seg inne på Arlington-kirkegården.

Merknad (av Per Manne). Matematisk sett er sammenligninger av uendelige områder i planet ikke uproblematisk. I en norsk geometribok av Bernt Michael Holmboe fra 1827 fins et «bevis» for Euklids parallellpostulat, basert på en ikke tillatt arealsammenligning av vinkelsektorer med ensidig uendelige parallelstriper. «Beviset» er trolig hentet fra en bok som Abel hadde fått fra Crelle, som hans lærer Holmboe tok vare på og leste mens Abel var på reise i Europa.

Pusleri nr. 45 (løsning):

Svaret er enkelt: $(a-b)/(a+b)$. Begrunnelsen kan gå slik:

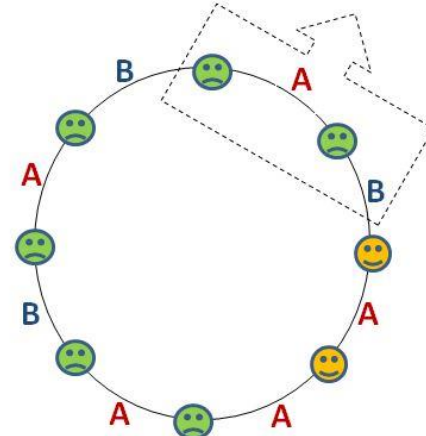
Den komplementære begivenhet er, når $a > b$, det samme som C = Stemmelikhet før eller senere. Denne kan skrives som en disjunkt union $C = C_A \cup C_B$, der C_A og C_B betyr henholdsvis start med A og B, og deretter stemmelikhet før eller senere. Vi har derfor $P(C) = P(C_A) + P(C_B)$. Sannsynligheten for start med B er $b/(a+b)$, og da er vi garantert stemmelikhet før eller senere, slik at $P(C_B) = b/(a+b)$. Vi skal så vise at $P(C_A) = P(C_B)$. Betrakt en vilkårlig C_A -rekkefølge. Bytter vi om A-stemmer og B-stemmer opp til det punkt stemmelikhet opptrer for første gang, får vi en tillatt C_B -rekkefølge, siden den starter med B og fortsatt vil bestå av a A'er og b B'er. Det samme resonnementet kan vi bruke på en vilkårlig C_B -rekkefølge, slik at til enhver C_A -rekkefølge finnes en C_B -rekkefølge og omvendt. Antall gunstige rekkefølger for C_A og C_B må derfor være det samme, slik at $P(C_A) = P(C_B)$. Vi får derfor den søkte sannsynlighet $1 - 2b/(a+b) = (a-b)/(a+b)$.

Problemstillingen fins i Sverdrup: Lov og tilfeldighet (bind I), Universitetsforlaget 1964, som den gang var pensum i kurset S1 i realfagstudiet og aktuarstudiet. Innføringen i sannsynlighet starter på side 7, og problemet kommer allerede som Eksempel 4 fem sider senere. Slik regning med begivenheter og kombinatorikk, med innlagt bruk av Bertrands refleksjonsprinsipp (fra 1887), kan synes krevende som første innføring i sannsynlighetsregning. Men slik var det den gang.

Her er en alternativ løsning: Betrakt et eksempel der $a+b=8$ med $a=5$ og $b=3$, og stemmesedlene kom i rekkefølgen ABAAABAB. Dette utfallet er her representert i en sirkel med start øverst (med urviserne). Sirkelen kan samtidig representere $a+b=8$ utfall, alt etter hvor en starter på sirkelen. Her er startstedet markert med ansikter, ☺ dersom opptellingen er gunstig for at A skal lede hele tiden, ☹ dersom den er ugunstig, dvs. B leder eller har oppnådd stemmelikhet underveis. Her leder A hele veien i to tilfeller av de 8 mulige, slik at sannsynligheten for at A skal lede hele tiden, betinget gitt denne sirkelen er $2/8 = 0.25$. Det viser seg imidlertid at vi får $2/8$ uansett hvilken sirkel som kan oppstå. Resonnement: Vi vil prøve å telle opp antall gunstige ved å fjerne ugunstige.

Blant de ugunstige opptellinger er selvsagt de som starter med B, og de som starter med AB. Velg en slik AB, for eksempel den stiplede i figuren, og se hva som skjer dersom de to stemmesedlene fjernes fra opptellingen. Vi vil alltid fjerne to ☹, og får en ny sirkel med 6 ansikter, 4 ☹ og 2 ☺, med korrekt angivelse også i forhold til den nye situasjon (sjekk det!). Dette gjentas for den nye sirkel, og gjentas helt til det ikke er flere B'er igjen, i alt tre ganger. Vi har da fjernet 3 A'er og 3 B'er, og sitter igjen med 2 A'er med merkelappen ☺. Antall gunstige er dermed $5 + 3 - 2 \times 3 = 2$.

Generelt: Antall gunstige i sirkel S: $(a+b-2xb) = a-b$ uavhengig av S.



Pusleri nr. 46 (løsning)

Vi vil finne sannsynligheten for at henholdsvis A, B og C sendes hjem. La

q_0 = Sannsynligheten for å bli sendt hjem, gitt gult kort (tapt siste duell)

q_1 = Sannsynligheten for å bli sendt hjem, gitt på vent (vunnet siste duell)

Her er det klart at $q_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot q_1$.

Betinging mhp resultatet av første duell: $P(A)=P(B)= \frac{1}{2} \cdot q_0 + \frac{1}{2} \cdot q_1$

Betinging mhp resultatet av de to første dueller: $P(C)= \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot q_0 + \frac{1}{4} \cdot q_0 = \frac{1}{2} \cdot q_0$

Innsettes dette i $P(A)+P(B)+P(C)=1$, får vi $q_0 = 4/7$ og $q_1=1/7$, som gir

$$P(A)=P(B)=5/14, P(C)=4/14,$$

dvs fordelingen for C er $1/14$ mindre sannsynlighet for å måtte reise hjem.

Pusleri nr. 47 (løsning)

Utrekning ved betinging er både naturlig og instruktiv: På står overfor en urne med ukjent antall hvite kuler N , der mulighetene $N=i$ og de tilhørende sannsynlighetene er:

i	0	1	2	3
$P(N=i)$	p^3	$3p^2(1-p)$	$3p(1-p)^2$	$(1-p)^3$
$P(N=i) \text{ } p=1/2$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

A_2 =Pål trekker to hvite kuler, B =Gjenværende kule er hvit

Da er

$$P(A_2) = \sum_{i=0}^3 P(A_2|N=i) \cdot P(N=i) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \sum_{i=0}^3 P(B|N=i) \cdot P(N=i) = 0 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_2 \cap B) = \sum_{i=0}^3 P(A_2 \cap B|N=i) \cdot P(N=i) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{3}{8} + 0 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

Altså er B og A_2 uavhengige, slik at også $P(B|A_2) = \frac{1}{2}$.

Generelt har vi ved innsetting $P(A_2) = p^2$, $P(B) = p$ og $P(A_2 \cap B) = p^3$, slik at uavhengigheten gjelder generelt.

Et mye enklere resonnement kan baseres på følgende: Et tilfeldig uordnet utvalg kan fås ved å trekke et tilfeldig ordnet utvalg, og så se bort fra rekkefølgen. Vi kan derfor tenke oss at Pål sitt utvalg på to kuler er de to første i et tilfeldig ordnet utvalg på tre kuler. I denne situasjonen kan vi like gjerne gå tilbake til Per sine tre binomiske forsøk med utfallsrom $U=\{HHH, HHS, HSH, SHH, HSS, SHS, SSH, SSS\}$, og uavhengigheten og de funne sannsynligheter følger da direkte for vilkårlig p .

Problemstillingen kan generaliseres til et vilkårlig antall kuler N , og vilkårlig utvalgsstørrelse n , til begivenheter A med gunstige utfall entydig bestemt ved resultatet frem til trekk nr. n , og B med gunstige utfall entydig bestemt ved resultatet etter trekk nr. n . Da er A og B uavhengige.

Det funne resultat har implikasjoner for kvalitetsstyring i praksis. Tradisjonell industriell kvalitetskontroll i masseproduksjon eller mottakskontroll var typisk basert på stikkprøver fra partier, der statistikere under og etter annen verdenskrig bidro med teori og utvikling av stikkprøveplaner med tilhørende tabeller (f.eks. Dodge & Romig). For gitt partistørrelse N kunne man da finne stikkprøvestørrelse n og kritisk grense c , ut fra ønskede kriterier. Eksempelvis med regler som: Forkast hele partiet dersom antall defekte Y i stikkprøven er over den kritiske grense c , og aksepter partiet dersom antallet er høyst c (med erstatning av eventuelt funne defekte). Med tilfeldige utvalg kunne teorien baseres på at Y , for gitt antall defekte M i partiet, er hypergeometrisk(N, M, n). Dersom produksjonen skjer som en binomisk prosess, dvs. at M er binomisk(N, p), vil nødvendigvis antall gjenværende defekte i partiet X utenom stikkprøven, være uavhengig av Y , og deres marginale fordelinger være binomiske med samme p . Stikkprøven er i denne situasjon uten verdi for formålet! Dette er for studenter en god treningsoppgave i formelregning med betingede sannsynligheter og marginalisering. Men det enkle verbale resonnementet fra kuleproblemet ovenfor er altså tilstrekkelig!

Denne innsikten er sentral i Deming sin kvalitetsfilosofi: Dersom produksjonen er i *statistisk kontroll* (les: binomisk prosess), er stikkprøveinspeksjon verdiløst. Dersom produksjonen ikke er i statistisk kontroll, kan alt skje. Første bud: Bring prosessen i statistisk kontroll, og hold den der (verktøy: kontrolligrammer iht. Shewhart)! Dersom den binomiske p er uakseptabel, trengs prosessendring. Dette innebærer en dreining mot prosessen(e) forut for det ferdige produkt, og vekk fra å sortere vekk ferdigprodusert vrak. Deming formidlet dette budskapet til japansk industri på 1950-tallet, der det ble implementert med suksess, mens gjennomslaget i Vesten først kom på 1980-tallet.

[Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 48 (løsning)

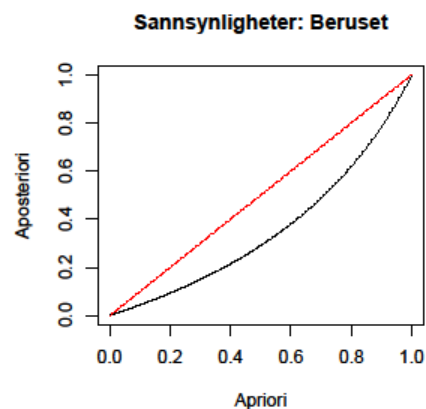
Sannsynligheten for å lykkes på femte forsøk er:

Med tilbakelegging: $(4/5)^4 \cdot 1/5 < 1/5$ (uten tilbakelegging).

Det faktum at han lykkes, tross den lavere sannsynligheten for å lykkes dersom han er beruset, taler til hans fordel. Merk at dersom han trengte et sjette forsøk, oppnår hun full sikkerhet for at han er beruset. Dersom hennes apriori-sannsynlighet er p for at han er beruset, blir aposteriori-sannsynligheten ifølge Bayes lov:

$$p \cdot (4/5)^4 \cdot 1/5 / (p \cdot (4/5)^4 \cdot 1/5 + (1-p) \cdot 1/5) = 1 / (1 + (5/4)^4 \cdot (1-p)/p) < p.$$

Dette er illustrert i figuren:



[Pusleri nr. 49 \(løsning\)](#)

En mulighet er å skrive ned den simultane sannsynlighet for antallene kron ($X_A=i, X_B=j$), og så summere en dobbeltsum over alle $i>j$. Et alternativ er å tenke seg at A først gjør n kast, og så et ekstra kast, og så regne ut den søkte sannsynlighet ved å betinge med hensyn på resultatet av de n første kastene. Utregningene gir begge etter litt kombinatorikk at den søkte sannsynlighet er $1/2$, og derfor noe overaskende ikke avhenger av n . Det bør derfor finnes en enklere løsning. Her er den enkleste:

Begivenhetene «A flere kron enn B» og «A flere mynt enn B» må, på grunn av rettferdige kast og symmetri, være like sannsynlige. I tilfellet der den ene tar et kast mer enn den andre, og bare da, er de to begivenhetene disjunkte og uttømmende, slik at hver må ha sannsynlighet $P_A=1/2$.

Sannsynligheten for at B får flere kron enn A blir imidlertid noe mer komplisert:

$$P_B = \frac{1}{2} - \binom{2n+1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}.$$

Dette kan finnes av $P_B=1-(P_A+P_C)$, der P_C er sannsynligheten for at A og B har like mange kron. Denne kan beregnes ved betinging mhp. antallet kron hver:

$$P_C = \sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{2n+1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}.$$

Generaliseringen der A tar $n+m$ kast, løses trolig enklest ved betinging og rekursjon:

La $P_A(m)$ være sannsynligheten for «A får flere kron enn B», i situasjoner der A har m flere kast enn B. Anta at B har gjort sine n kast. For at A skal ha flere kron enn B etter sine $n+m$ kast, må dette enten være oppnådd etter A sine $n+m-1$ første kast eller så må det være likhet etter $n+m-1$ kast og en ny kron i A sitt $n+m$ 'te kast. Dette gir for $m \geq 1$ rekursjonen

$$P_A(m) = P_A(m-1) + \binom{2n+m-1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+m}, \text{ der } P_A(0) = \frac{1}{2} - \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1},$$

der vi også har benyttet sannsynligheten for likhet (og symmetri) i beregningen av $P_A(0)$. Herav følger for $m \geq 1$ at

$$P_A(m) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \sum_{i=1}^{m-1} \binom{2n+i}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

Pusleri nr. 50 (løsning)

Dersom begge tar med mynten, er sannsynligheten for å lykkes $\frac{1}{4}$.

Dersom en tar med mynt og den andre ikke er sannsynligheten for å lykkes $\frac{1}{2}$.

Anta at hver velger en randomisert strategi der $p=P(\text{Jeg tar med mynten})$.

Da er sannsynligheten for å lykkes

$$p^2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot p \cdot (1 - p) \cdot \frac{1}{2} + (1 - p)^2 \cdot 0 = p - \frac{3}{4}p^2$$

som har maksimum for $p=2/3$, med maksimumsverdi $1/3$.

Optimalisering ved å anta at Per og Pål har ulike sannsynligheter gir selvsagt samme optimale løsning, men kan gi ytterligere innsikt i løsnings karakter.

Anta at hverken Per eller Pål rakk å finne den optimale løsningen, og begge valgte å knipse sin mynt for å bestemme om de skulle ta den med ned i stuen eller ikke. Setter vi inn $p=1/2$ ovenfor, blir sannsynligheten for å lykkes $5/16$, altså ikke mye redusert. Anta så følgende: Per fant den optimale løsningen og simulerte utfallet med en rettferdig terning som tilfeldigvis var for hånden eller ved bruk av mynten (hvordan?). Pål derimot rakk ikke å finne løsningen, og i sin fortvilelse knipset han sin mynt en gang for å bestemme om han skulle ta den med seg eller ikke. Spørsmålet er da om Pål med dette reduserer sjansene for at brødrene kommer på Brann-kamp. Nei! Beregning av sannsynligheten under denne forutsetningen gir også $1/3$, som trolig er overraskende for mange. Forklaringen ligger i følgende: Dette er et såkalt kooperativt spill, der teorien for såkalt Nash-likevekt gjelder (etter John Nash, vinner av Nobel-prisen i økonomi i 1994 og Abel-prisen i 2015): Den optimale randomiserte strategi har egenskapen at den enkelte spiller er indifferent til hva den andre spiller velger. Anta at Per velger å ta med mynten med sannsynlighet p . Da er sannsynligheten for å lykkes $p \cdot \frac{1}{2}$ dersom Pål ikke ta med sin mynt, og $p \cdot \frac{1}{4} + (1 - p) \cdot \frac{1}{2}$, dersom Pål tar med sin mynt. Ved indifferens er disse to sannsynlighetene lik hverandre, og det skjer når $p=2/3$.

Pusleri nr. 51 (løsning)

Sannsynlighetene for ventetidene 1, 2, 3, ..., n:

1	2	3	4	...	n
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5}$	...	$\frac{n}{(n-1)!}$

Med uendelig horisont blir forventet ventetid $EX = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{n}{(n-1)!} = e - 1 = 1.71828$

Uten kjennskap til summeformelen, kan du som statistiker vri deg unda med følgende omskriving: $EX = e \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)^2 \cdot \frac{e^{-1}}{n!} - 1 = e - 1$, der summen er variansen til en Poisson-

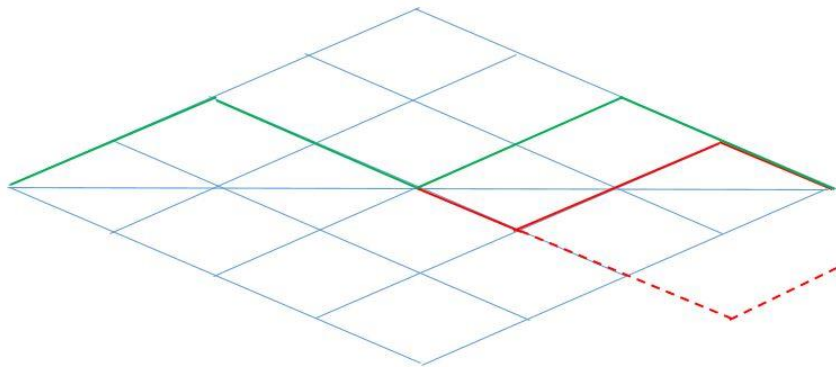
fordelt variabel med forventning (og varians) lik 1. Her blir $P(X \geq 7) = 0.0002$, og forventningen til $\max(X, 7)$ blir 1.71825, som adskiller seg fra uendelig horisont først i femte desimal.

Kommentarer: Problemstillingen er komplementær til den såkalte Polya urnemodell (Polya, 1931). Forskjellen er at i Polya-modellen får den som blir trukket ut en ny kule tillagt urnen, mens i vårt problem får den som *ikke* blir trukket ut en ny kule, og dermed økt sannsynlighet ved neste trekning. Polya-modellen i mer generell form er grundig studert teoretisk, se for eksempel den klassiske boken til Feller (1957), som var pensum i kurset S3 ved UiO på 1960-tallet. Spesialtilfeller er blitt anvendt på flere områder, blant annet for å studere spredning av smittsomme sykdommer. Bernard Friedman (1949) betraktet kombinasjonen, med tillegg av a kuler av trukken farge og b kuler av motsatt farge. Asymptotiske resultater for andelen kuler av hver farge i urnen er helt ulike for $b=0$ (Polya) og for $b>0$, se f.eks David Freedman AMS, 1965.

[Pusleri nr. 52 \(løsning\)](#)

Sannsynligheten for at det oppstår veksleproblem er $4/5$.

Notér for hver kunde $+1$ for 100 kroneseddel og -1 for 200 kroneseddel, og la s_k være delsum etter kunde nr. k . Veksleproblem oppstår straks s_k blir negativ. Situasjonen kan illustreres med en graf med retning fra venstre mot høyre, der en ved hver node går opp $(+1)$ eller ned (-1) , så lenge det går an. Nivået i vertikal retning svarer til delsummene underveis. Utfallsrommet er alle mulige stier fra startnoden (til venstre) til sluttnoden (til høyre). Billettøren får et veksleproblem straks stien bryter den horisontale midtlinjen fra oversiden til undersiden. I grafen er tegnet et utfall uten veksleproblem med grønn strek $(+1+1-1-1+1+1-1-1)$, og et utfall med veksleproblem med heltrukken rød strek $(+1+1-1-1-1+1+1-1)$. Den stiplede fortsettelsen kommer vi tilbake til.



Vi antar at alle mulige stier er like sannsynlige og bruker regelen om «gunstige på mulige». Med $m=2n$ personer i køen blir antall mulige stier $\binom{2n}{n}$, som for $n=4$ er lik 70. Flertallet av stier går innom undersiden, og vi teller derfor de som ikke gjør det, og finner 14.

Sannsynligheten for at det ikke oppstår noe veksleproblem er derfor $14/70=1/5$. I jakten på en generell formel får man for $n=2$ sannsynligheten $1/3$, og for $n=3$ sannsynligheten $1/4$. Er det virkelig slik at i det generelle tilfellet $n=2m$ er sannsynligheten for intet veksleproblem lik $1/(n+1)$ og dermed veksleproblem $n/(n+1)$? Ja, slik er det, og da bør det vel finnes et enkelt resonnement?

La generelt $S(a, b)$ være en sekvens av a $+1$ 'ere og b -1 'ere. Antall slike sekvenser er $B(a, b) = \binom{a+b}{a} = \frac{(a+b)!}{a!b!}$. Med $m=2n$ kunder i køen, har vi en $S(n, n)$ sekvens. En slik kø som leder til veksleproblem kaller vi $S^*(n, n)$ -sekvens. Disse har minst en negativ delsum, og er innom undersiden i figuren. Det er klart at antall mulige stier er $B(n, n)$, og vi skal vise at antall stier som gir veksleproblemer blir $B(n-1, n+1)$. Dette gir

$$\text{gunstige/mulige} = B(n-1, n+1)/B(n, n) = n/(n+1).$$

Her er et enkelt resonnement for telleren som omgår omfattende analytisk regning: Betrakt en vilkårlig $S^*(n, n)$ -sekvens (problemkø) og anta at veksleproblemet oppsto først ved kunde nr. k (som må være et odde-tall). Blant de $k-1$ foran i køen må det ha vært like mange $+1$ som -1 . Med nr. k kom en ny -1 , og blant de etter nr. k i køen må det så være en $+1$ mer enn det er -1 . Hvis vi bytter fortegn på disse $2n-k$ kundene, sitter vi igjen med en entydig $S(n-1, n+1)$ -sekvens. Det er dette som illustreres med de stiplede fortsettelsen av de røde linjestykkene. Slike sekvenser har sluttnode på undersiden, svarende til sluttdelsum

på -2. På den annen side, dersom vi har en vilkårlig slik $S(n-1, n+1)$ -sekvens (for problemkø eller ikke), gis en entydig $S^*(n, n)$ -sekvens (problemkø). Det ser vi ved at en $S(n-1, n+1)$ -sekvens må ha delsum -1 før eller senere, første gang ved kunde nr. k . Det er da like mange +1 som -1 før kunde nr. k , og en -1 mer blant de etter nr. k i køen. Dersom vi bytter fortegn for disse, blir det like mange +1 som -1 i hele køen, som derfor har tilordnet en entydig bestemt $S^*(n, n)$ -sekvens. Antall $S^*(n, n)$ -sekvenser må derfor være lik antall $S(n-1, n+1)$ -sekvenser. Merk at antallet problemstier og ikke-problemostier er henholdsvis

$$B_n = \frac{n}{n+1} \binom{2n}{n} \quad \text{og} \quad C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Her er $\{C_n, n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ følgen av såkalte Catalanske tall, etter Eugène Catalan (1814-1894), som dukker opp i mange ulike problemstillinger, noen allerede på 1700-tallet (bl. a. hos Euler). Resonnementet ovenfor er blitt kalt André's refleksjonsprinsipp, etter Désiré André (1840-1918), som anvendte det i en annen sammenheng (Bertrand's ballot problem). Vi kjenner også lignende resonnementer i forbindelse med passeringssannsynligheter i Wiener-prosessen.

En helt annen tilnærming til problemet går ut på å etablere konvolusjonsformelen

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k \cdot C_{n-k} ; C_0 = 1$$

Denne gir en ligning for den tilhørende genererende funksjon. Rekkeutvikling av løsningen gir C_n . Det som trengs for å etablere ligningen er at enhver uproblematisk $S(n+1, n+1)$ -sekvens kan entydig «faktoriseres» på formen $(+1)S_1(k, k)(-1)S_2(n-k, n-k)$, for en eller annen $k=0, 1, \dots, n$. der $S_1(k, k)$ og $S_2(n-k, n-k)$ begge er uproblematiske sekvenser, og der $S_1(0, 0)$ og $S_2(0, 0)$ betyr «tom sekvens». Eksempelvis faktorerises den grønne sti i figuren slik: $(+1+1-1-1+1+1-1-1) \rightarrow (+1)(+1-1)(-1)(+1+1-1-1)$.

I situasjonen der billettøren har to 100 kronesedler i kassen istedenfor ingen, blir en generell beregning tilsynelatende svært komplisert, men i tilfellet der det er akkurat to flere kunder med 200 kroner enn 100 kroner, åpner det seg en enkel mulighet: Start med en $S(n+1, n+1)$ -kø uten 100 kronesedler i kassen. Skriv ned uttrykket for sannsynligheten for at dette er en problemkø ved å betinge med omsyn på de to første i køen. Det er da tre muligheter: $(-1-1)$ $(-1+1)$ leder direkte problem, $(+1, -1)$ leder til $S(n, n)$ -kø uten 100 kronesedler i kassen, og $(+1+1)$ leder til en $S(n-1, n+1)$ -kø med to 100 kronesedler i kassen. Dette gir en ligning, der alle sannsynlighetene for problemkø som inngår er kjent unntatt den siste, som nettopp er den det spørres etter. Innsetting og løsning gir sannsynligheten for problemkø lik $(n-1)/(n+2)$ og dermed sannsynligheten for uproblematisk kø lik $3/(n+2)$. For $n=4$ blir de to mulighetene like sannsynlige. Merk at de to ekstra 100-kronesedlene i kassen mer enn kompenserer for at det er to flere som trenger veksling av sin 200 kroneseddel.

[Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 53 (løsning)

Sannsynlighetsfordelingen for tilfellet $(m, n-m)=(2,3)$, dvs fem venner hvorav to pålitelige blir ved opptelling av «gunstige på mulige»:

k	2	3	4	5	EX=4
P(X=k)	1/10	2/10	3/10	4/10	

Sannsynligheten for at de blir mange nok til bridge er derfor 70%.

Etter at en er strammet opp og vi har $(m, n-m)=(3,2)$, blir tilsvarende sannsynligheten 90% og forventningen 4.5.

Generelt for tilfellet $(m, n-m)$ kan opptellingen skje ved å fastslå at

$(X=k)$ er ekvivalent med at «Første pålitelige ankommer som nr. $n-k+1$ ».

Opptellingen skjer ved å velge ut plassene i rekkefølgen for de pålitelige. For antall gunstige i teller skal vi ha den første pålitelige på plass nr. $n-k+1$, og de $m-1$ andre pålitelige må plasseres blant de $k-1$ gjenværende plassene etter den første. Vi får

$$P(X = k) = \frac{\binom{k-1}{m-1}}{\binom{n}{m}} ; k = m, m+1, \dots, n.$$

Forventningen blir

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=m}^n k \frac{\binom{k-1}{m-1}}{\binom{n}{m}} = \frac{m}{\binom{n}{m}} \sum_{k=m}^n \binom{k}{m} \\ &= \frac{m}{\binom{n}{m}} \binom{n+1}{m+1} = (n+1) \frac{m}{m+1} \end{aligned}$$

Dette gir for $(m, n-m)=(2,3)$ og $(3,2)$ henholdsvis $EX=6 \cdot 2/3=4$ og $EX=6 \cdot 3/4=4.5$, som ovenfor.

Antall upålitelige Y som blir værende har forventning $E(Y) = E(X) - m = (n-m) \frac{m}{m+1}$.

Forventningen til X for gitt (m, n) , kall den $E_{m,n}$, kan også finnes ved betinging med omsyn til først ankomne. Da får vi rekursjonen $E_{m,n} = \frac{m}{n} \cdot m + \frac{n-m}{n} \cdot E_{m,n-1}$ for $n > m$, der $E_{m,m} = m$, med løsning som ovenfor.

Pusleri nr. 54 (løsning) :

Med $n=5$ båser er det i beste fall plass til tre skyttere, i verste fall bare to. De mulige utfall med tilhørende sannsynligheter er gitt i tabellen nedenfor. Eksempelvis: Dersom den først ankomne velger bås nr. 1 (sannsynlighet $1/5$), er den neste nødt til å velge bås nr. 3, 4 eller 5. Velger denne bås nr. 4 (sannsynlighet $1/3$) er det ikke plass til flere ($X=2$). Velger denne bås nr. 3 eller bås nr. 5 (sannsynlighet $1/3+1/3$), har også en tredjemann en tilgjengelig bås (sannsynlighet 1). Her er det altså de andre ankomne som forkludrer. Mer ødeleggende er dersom den først ankomne velger bås nr. 2 eller bås nr. 4. Da er det ikke plass til alle tre uansett hva de neste gjør.

Utfall	14	24	25	41	42	52	$X=2$
Prob	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}$	$8/15$
Utfall	135	153	315	351	513	531	$X=3$
Prob	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}$	$7/15$

Sannsynligheten for full utnyttning iht. avstandsregelen er dermed $7/15$, altså litt mindre enn 50%. Forventet antall skyttere som får plass er $EX=2 \cdot 8/15 + 3 \cdot 7/15 = 37/15$.

For $n=6$ er de mulige verdiene av X fortsatt 2 og 3. Sannsynlighetene finnes enklest ved å merke seg at nå vil full utnyttelse kunne forhindres bare når de to først ankomne velger bås nr. 2 og 5. Det skjer med sannsynlighet $1/6 \cdot 1/3 + 1/6 \cdot 1/3 = 1/9$. Forventningen blir $EX=2 \cdot 1/9 + 3 \cdot 8/9 = 26/9$.

For $n=7$ kan X anta verdiene 3 og 4. Full utnyttelse kan nå oppnås eller forhindres på flere ulike måter. Ser vi på hvordan valgene til de to først ankomne kan lede til full utnyttelse, er det fire tilfeller:

Først ankomne velger endebås og den andre ankomne velger endebås blant de nå tillatte: $8 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}$.

Først ankomne velger endebås og andre ankomne velger ikke endebås: $4 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}$.

Først ankomne velger ikke endebås og andre ankomne velger endebåsen på «trang side»: $4 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$.

Først ankomne velger ikke endebås og andre ankomne velger bås på «vide side»: $8 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$.

Lagt sammen gir dette sannsynligheten $34/105$ for full utnyttelse og dermed $71/105$ for ufullstendig. Forventningen til antall plasserte blir derfor $EX=3 \cdot 71/105 + 4 \cdot 34/105 = 349/105$.

For $n=9$ vil X kunne anta tre mulige verdier, 3, 4 og 5, og antallet vi øke med n . Det er ikke lett å finne et formeluttrykk for sannsynlighetene for vilkårlig n . Det er imidlertid enkelt å etablere en rekursjonsformel for forventet antall plasserte skyttere for gitt n , kall forventningen a_n . Formelen er

$$a_n = 1 + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-2} a_i$$

Formelen uttrykker 1 (den først plasserte) pluss forventet antall plasserte utover den første. Resultatene ovenfor bekreftes ved følgende beregninger:

$$\begin{aligned} a_3 &= 1 + \left(\frac{2}{3}\right) \cdot 1 = 5/3 \\ a_4 &= 1 + \left(\frac{2}{4}\right) \cdot (1 + 1) = 2 \\ a_5 &= 1 + \left(\frac{2}{5}\right) \cdot \left(1 + 1 + \frac{5}{3}\right) = 37/15 \\ a_6 &= 1 + \left(\frac{2}{6}\right) \cdot \left(1 + 1 + \frac{5}{3} + 2\right) = 26/9 \\ a_7 &= 1 + \left(\frac{2}{7}\right) \cdot \left(1 + 1 + \frac{5}{3} + 2 + \frac{37}{15}\right) = 349/105 \end{aligned}$$

Begrunnelsen for rekursjonsformelen skjer ved betinging med omsyn til den først ankomnes valg av bås nr. k , som skjer med sannsynlighet $1/n$, for $k=1,2,\dots,n$. Den neste ankomne står foran følgende:

For $k=1$ og n : En valgsituasjon med $n-2$ sammenhengende båser.

For $k=2$ og $n-1$: En valgsituasjon med $n-3$ sammenhengende båser.

For $2 < k < n-1$: En valgsituasjon med to områder med henholdsvis $k-2$ og $n-k+2$ båser.

Ved betinging og summasjon over k , ser vi at de betingede forventninger for antall ytterligere plasserte kan uttrykkes ved de ubetingede forventningene på en slik måte at hver $a_i, i = 1, 2, \dots, n-2$ forekommer to ganger i summen.

Rekursjonsformelen ovenfor kan skrives (som påpekt av Jarle Tufto, takk til han!)

$$a_n = 1 + \frac{2}{n} (a_{n-2} + \frac{n-1}{2} (a_{n-1} - 1))$$

som gir oss rekursjonen

$$a_n = \frac{n-1}{2} a_{n-1} + \frac{2}{n} a_{n-2} + \frac{1}{n}$$

Numerisk beregning med startverdiene $a_1 = a_2 = 1$ gir at a_n vokser tilnærmet lineært med n , og med vinkelkoeffisient omtrent lik 0.432.

Rekursjonen er en inhomogen differensligning med ikke-konstante koeffisienter.

En analytisk løsning $\{a_n\}$ kan finnes ved hjelp av den genererende funksjon $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Med utgangspunkt i differensligningen og utnytte den deriverte $A'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}$, får vi følgende differensialligning for den genererende funksjon:

$$A'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2x}{1-x} \cdot A(x)$$

Denne har løsning

$$A(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{2(1-x)^2}$$

Rekkeutvikling gir følgende sluttede uttrykk for forventningen

$$a_n = \sum_{i=1}^n (-2)^{i-1} \frac{(n-i+1)}{i!}.$$

Som sjekk beregnes $a_5 = 5 - 4 + 2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{15} = \frac{37}{15}$, dvs. som funnet ovenfor.

Av formelen følger også at $a_n/n \rightarrow \frac{(1-e^{-2})}{2} \approx 0.43233235838$ når $n \rightarrow \infty$

Merknad: Differensialligningen kan også utledes uten nå gå veien om den avledede differensligning. Vi skriver

da $a_{n+1} = 1 + \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^{n-1} a_i$, som alternativt kan uttrykkes som

$a_{n+1} = 1 + \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^n b_i \cdot a_{n-i}$, der $a_0 = 0$ og $\{b_n\}$ er sekvensen $\{0, 1, 1, 1, 1, 1, \dots\}$ med genererende funksjon $B(x) = x/(1-x)$. Her er $c_n = \sum_{i=0}^n b_i \cdot a_{n-i}$ konvolusjonen $\{c_n\} = \{b_n\} * \{a_n\}$ med genererende funksjon $C(x) = B(x) \cdot A(x)$

[Innholdsliste](#)

[Pusleri nr. 55 \(løsning\)](#)

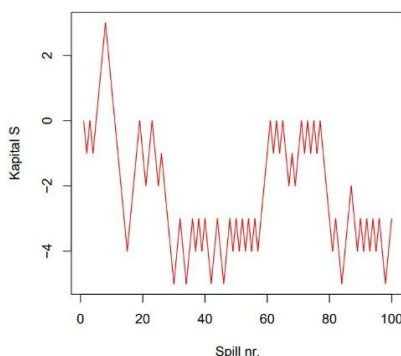
Beregningen er basert på forestillingen om at de ugunstige tilstanders andel av tallinjen er bestemmende for andelen ganger der en møter den ugunstige sannsynligheten i det lange løp. Det er ikke tilfelle! Dette avsløres ved å betrakte Markovkjeden $\{X_n\}$ med tre tilstander 0, 1 og 2, der for $i=0,1,2$ $X_n = i$ når status etter n'te spill $S_n \equiv i \pmod{3}$. Anta generelt at de to sannsynlighetene er $p_1 < p_2$. Da har vi følgende overgangsmatrise

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p_1 & 1-p_1 \\ 1-p_2 & 0 & p_2 \\ p_2 & 1-p_2 & 0 \end{bmatrix}$$

De stasjonære sannsynligheter er $\pi = \frac{1}{D}(1-p_2+p_2^2, 1-p_2+p_1p_2, 1-p_1+p_1p_2)$, der D er faktoren som gir sum sannsynligheter lik 1. Innsatt $p_1 = \frac{1}{10}$ og $p_2 = \frac{3}{4}$ gir $\pi = (\frac{5}{13}, \frac{2}{13}, \frac{6}{13})$. Ny utregningen av sannsynligheten for å vinne gir derfor

$$P(\text{Vinne}) = \frac{5}{13} \cdot \frac{1}{10} + \frac{8}{13} \cdot \frac{3}{4} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}$$

I denne forstand har vi derfor et rettferdig spill (i det lange løp). For en tilsvarende «random walk» vet vi at prosessen kan «fly av gårde» i en av retningene uten stabiliserende karakter rundt null. Noe tilsvarende er tilfelle her, og forklarer Pål sin dårlige spillerfaring, her illustrert med en graf, som også illustrerer noe av prosessens eiendommelige karakter



Parrondo's paradoks: Det beskrevne spill forekommer ofte ved presentasjon av det såkalte Parrondo's paradoks. Dette innebærer grovt sagt at det er mulig å kombinere to spill som begge er til din ugunst til et spill i din favør. La oss først kombinere to rettferdige spill. Spillet ovenfor, kall det A, kombineres med et nytt spill B, svarende til myntkast med rettferdig mynt, dvs. sannsynligheten for å vinne en myntenhet er $\frac{1}{2}$. Anta at man foran hver spilleomgang randomiserer hvilket av de to spillene som skal spilles. Med sannsynlighet 0.6 spilles A og med sannsynlighet 0.4 spilles B. Det viser seg at (i det lange løp) $P(\text{Vinne}) = 0.5131 > 0.5$. Vi kan til og med starte med spill A og B i vår ugunst, illustrert ved å redusere sannsynlighetene for å vinne 1 myntenhet i hvert av delspillene, eksempelvis trekk fra 0.005. Dette gir for spill A: 0.0095, 0.745 (med beregnet sannsynlighet 0.4957 for å vinne i det lange løp), for spill B: 0.495. Kombineres nå de to spillene A og B på samme måte som ovenfor, får vi $P(\text{Vinne}) = 0.5081 > 0.5$, på tross av at spill A og spill B begge er ufordelaktige isolert sett. Paradoxet kan også fremkomme uten å randomisere mellom A og B, men isteden veksle mellom å spille A og B etter forutbestemt mønster.

Paradokset er oppkalt etter den spanske fysikeren Juan Parrondo, som presenterte det midt på 1990-tallet. Fenomenet ble belyst av han og mange andre i årene etter, i stor grad ikke-statistikere. Det skal her sies at vårt spill A ikke er et spill i John von Neumann's forstand (1944), som er grunnlaget for klassisk nytteteori. Økonomer har da også avvist dets relevans for økonomisk teori. Spillet A er imidlertid innen rammen av spill i David Blackwell's forstand (1954). Paradokset finnes i mange forkledninger, og dets relevans er omdiskutert i ulike sammenhenger (også dagligdagse). Noen vil sikkert fornemme slektskapet til det mer velkjente Simpson's paradoks. Det ble etter hvert en omfattende litteratur om paradokset og dets ulike varianter. Nedenfor er en kort liste.

Litteratur

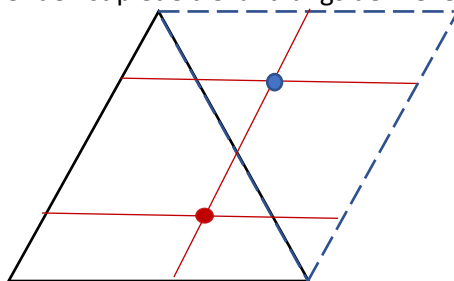
- Parrondo, J. M. R (1996) How to cheat a bad mathematician, in EEC HC&M Network on Complexity and Chaos, ISI, Torino, Italy. (Upublisert).
- Harmer G. P. & Abbott D. (1999) Parrondo's paradox: Losing strategies cooperate to win, Nature 402, 864. (Kort lettlest introduksjon)
- Harmer, G.P. & Abbot, D. (1999) Parrondo's paradox, Statistical Science 14 (1999) 206–213. (For statistikere)
- Harmer, G.P. & Abbot, D. (2002) A review of Parrondo's paradox, Fluctuation and Noise Letters, vol.2, no.2, 71-107. (Oversikt med mange referanser)
- Von Neumann, J. (1944) Theory of Games and Economic Behavior, Princeton: Princeton University Press.
- Blackwell, D. & Girshick, M. A. (1954) Theory of Games and Statistical Decisions, New York: John Wiley & Sons

[Innholdsliste](#)

[Pusleri nr. 56 \(løsning\)](#)

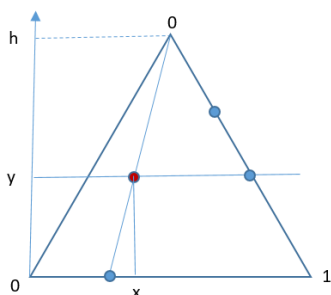
Her vises fire metoder: to geometriske, som fritar helt fra tall- og formelregning, og to analytisk metoder som krever en viss bakgrunn i fordelingsteori og som lar seg generalisere til n -dimensjonale simplekser.

Metode 1: En enkel geometrisk løsning er illustrert i Figur 1 nedenfor, der den likesidige trekanten er supplert med en tilsvarende trekant (stiplet), slik at vi får en rombe med sidekanter av lengde 1. Trekk et tilfeldig tall mellom 0 og 1 og avsett det på den horisontale sidekanten, og trekk linje parallell med venstre sidekant. Trekk et nytt tilfeldig tall og avsett langs venstre side og trekk horisontal linje. Skjæringspunktet vil være et tilfeldig innen romben. Punkter som faller utenfor trekanten kan enten fjernes eller flyttes, enten ved å erstatte det siste tilfeldige tall r med $1-r$ som vist i figuren, eller brette over den stiplete trekant langs den felles sidekant.



Figur 1

Metode 2: Et annet geometrisk resonnement, illustrert i Figur 2 nedenfor, går som følger: Legg den likesidede trekanten med sidelengde 1 og dermed høyde $h = \sqrt{3}/2$ inn i (x,y) -koordinatsystem. Betrakt et tilfeldig punkt (X,Y) . Den marginale tetthet til Y må være proporsjonal med avstanden $h-y$ fra toppunktet, en proporsjonalitet som like gjerne kan avsettes langs sidekanten fra toppunktet (0) til høyre hjørne (1), dvs. langs et linjestykke av lengde 1. Simuler to $\text{Uniform}[0, 1]$ variable (de to blå punkter), og velg deres maksimum (laveste punkt), som nettopp har sannsynlighetstetthet proporsjonal med avstanden. Dette gir Y og den horisontale linjen i figuren. X kan da realiseres ved å avsette en $\text{Uniform}[0, 1]$ variabel langs x -aksen (blått punkt), og så trekke linjen til toppunktet. Skjæringspunktet av de to linjene (rødt punkt) er da den realisererte (X,Y) .



Figur 2

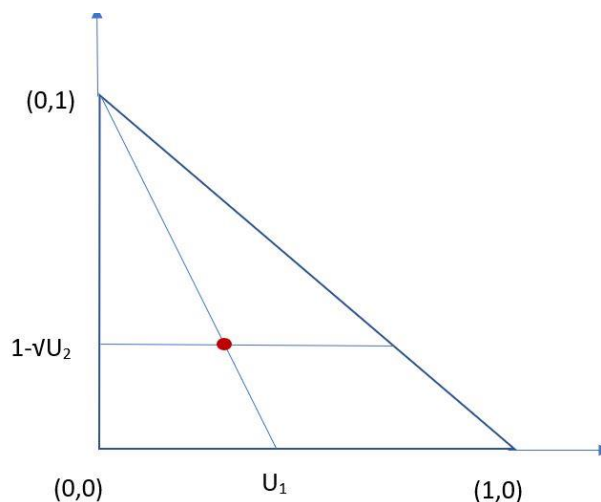
Merknader. Trekanten behøver ikke være likesidet. Resonnementet går like greit for enhver trekant med to sider av lengde 1, f.eks. den rettvinklede trekanten i Figur 3 nedenfor. Hva dersom bare en side (basis) har lengde 1? Da lager vi bare en formlik trekant med tilstøtende side av lengde 1, der vi avsetter to trekningen som punkt og velger det laveste. Med velvalgte hjelpelinjer overføres dette punktet til den opprinnelige trekanten. Dette gir oss y og dermed den horisontale linjen. Den kryssende linjen for bestemmelsen av x gis da som ovenfor.

Hovedideen ovenfor lar seg generalisere til tetraeder i rommet med sidelengder 1, der areal av horisontale snitt er proporsjonal med kvadratet av avstanden til toppunktet. Simuler tre uavhengige Uniform[0,1] og avsett langs sidekant fra toppunktet. Legg snittflate gjennom det laveste punkt. Simuler så et tilfeldig punkt i snitt-trekanten som ovenfor. Merk at ideen med lavest av tre punkter kan brukes også ved pyramider og kjegler, der et tilfeldig punkt i snittflaten selvfølgelig må simuleres på annet vis.

Merk også at $U \sim \text{Uniform}[0,1]$ medfører at $\sqrt{U}$ har tetthet proporsjonal med u . Med kalkulator kan vi derfor bruke dette istedenfor å gå veien om maksimum av to U 'er. Tilsvarende kan vi bruke $\sqrt[3]{U}$ istedenfor maksimum av tre for tetraederet.

Metode 3: Vi ønsker en eksplisitt formel for simulering. Dersom vi har en formel for en fritt valgt trekant, har vi i realiteten løst problemet for en vilkårlig trekant, fordi en slik alltid fås ved en affin transformasjon, dvs. transformasjon som bevarer linjer som linjer og bevarer parallellitet. Det er hensiktsmessig å ta utgangspunkt i trekanten i Figur 3 med sidekanter langs aksene, og der U_1 og $\sqrt{U_2}$ avsettes. Geometrien i figuren innebærer at $X/U_1 = \sqrt{U_2}/1$, som gir simuleringsformelen

$$(X, Y) = (\sqrt{U_2} \cdot U_1, 1 - \sqrt{U_2})$$



Figur 3

En alternativ formel som er symmetrisk i X og Y blir

$$(X, Y) = (\sqrt{U_2} \cdot U_1, \sqrt{U_2} \cdot (1 - U_1))$$

Dette ser vi ved å betrakte summen $S = X + Y$, med verdi mellom 0 og 1 og fordeling med tetthet proporsjonal med s , og som simuleres med $\sqrt{U_2}$. Betinget gitt $S = s$, er X fordelt Uniform[0,s], dvs. X/s er Uniform[0,1]. Denne simuleres med U_1 . Dette gir oss ubetinget $X = \sqrt{U_2} \cdot U_1$ og samtidig $Y = S - X = \sqrt{U_2} \cdot (1 - U_1)$.

Den tilsvarende formel for en likesidet trekant med samme basis (se Figur 2) får vi med den lineære transformasjonen $X' = X + Y/2$, $Y' = (\sqrt{3}/2)Y$. En figur produsert med to kodelinjer i R:

```
u <- matrix(runif(2000), ncol = 2)
plot(0.5*sqrt(u[,2])*(1+u[,1]), sqrt(3/4)*sqrt(u[,2])*(1-u[,1]), pch=20, col="red")
```

Uten den geometriske innsikt faller det nok naturlig å ta utgangspunkt i den simultane sannsynlighetstetthet, og bruke tilgjengelig fordelingsteori. Med sikte på generalisering trenger vi et egnet koordinatsystem, og har valgt mellom euklidske og barysentriske. Barysentriske koordinater har fordelen at koordinatene er invariant ved affine transformasjoner, dvs. forskyvning, speiling,

rotasjon, ekspansjon og kompresjon. Tar vi utgangspunkt i trekanten i Figur 3 vil den og dens indre være (x_1, x_2) der $x_1 + x_2 \leq 1$. I barysentriske koordinater uttrykkes dette som (x_0, x_1, x_2) , der $x_0 + x_1 + x_2 = 1$. De tre hjørnene i trekanten blir da $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ og $(0, 0, 1)$ som er henholdsvis venstrehjørne (euklidisk origo), høyrehjørne og topp. Med vårt valg av trekant vil vi gjenfinne de euklidske koordinatene som de to siste barysentriske.

På grunn av symmetrien kan vi velge to av elementene i (X_0, X_1, X_2) som grunnlag for simuleringen. Vi ser at den barysentriske løsningen

$$(X_0, X_1, X_2) = (1 - \sqrt{U_2}, \sqrt{U_2} \cdot U_1, \sqrt{U_2} \cdot (1 - U_1))$$

og de to euklidske løsningene ovenfor svarer til ulike valg av to elementer fra den barysentriske. Dersom trekanten isteden har hjørner med barysentriske koordinater henholdsvis b_0, b_1, b_2 er trekanten og dens indre simulert ved $(X_0', X_1', X_2') = X_0 \cdot b_0 + X_1 \cdot b_1 + X_2 \cdot b_2$. Dersom trekanten er likesidet med samme basis som ovenfor (som i Figur 2), er $b_0 = (1, 0, 0)$, $b_1 = (0, 1, 0)$ og $b_2 = (1 - 1/2 - \sqrt{3}/2, 1/2, \sqrt{3}/2)$, som gir samme euklidske koordinater som ovenfor for denne trekanten.

Metode 4: Uniform fordeling over trekanten vil i euklidske koordinater være $f(x_1, x_2) = 2$ for $x_1, x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 \leq 1$. Alternativt uttrykt i barysentriske koordinater $f(x_0, x_1, x_2) = 2$ for $x_0, x_1, x_2 \geq 0$, $x_0 + x_1 + x_2 = 1$. Hvordan vi så går fram vil avhenge av våre kunnskaper i fordelingsteori. Noen vil innse at fordelingen er Dir(1,1,1), dvs. en Dirichlet-fordeling med parametre (1,1,1), og som utvidelsen av Beta-fordelingen til flere dimensjoner har den Beta-marginaler og nedskalerte Beta-betingede fordelinger. Denne fordeling oppstår blant annet ved andeler for uavhengige Gammafordelte variable med samme skalaparameter, herunder spesielt eksponensialfordelingen med forventning 1, som nettopp gir Dir(1,1,1). En eksponensialfordelt variabel får vi ved minus logaritmen til en Uniform[0,1] variabel. For (X_0, X_1, X_2) har vi derfor:

$$X_i = \log(U_i) / \log(U_0 \cdot U_1 \cdot U_2).$$

Dette gir derfor de to euklidske koordinatene (X_1, X_2) uttrykt ved tre uavhengige Uniform[0,1]-variable (U_1, U_2, U_3) . Resultatet generaliseres direkte til et n-dimensjonalt simpleks, der $n=2$ svarer til trekant og $n=3$ til tetraeder.

Metode 3 (forts.): De to formlene basert på geometrisk resonnement kan generaliseres til n-dimensjonalt simpleks ved hjelp av den såkalte invers-metoden anvendt rekursivt på betingede fordelinger. En mulighet går som følger:

Betrakt $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ i euklidske koordinater og la $S_k = X_1 + X_2 + \dots + X_k$, for $k=1, 2, \dots, n$ (som innebærer at $S_1 = X_1$). Uniform modell på n-simplekset innebærer at S_k er fordelt Beta(k, n+1-k) for $k=1, 2, \dots, n$. Vi merker oss spesielt $k=n$, der fordelingen er Beta(n,1) og derfor har kumulativ fordeling $F_n(s) = s^n$. Modellen innebærer videre at S_k gitt S_{k+1} har kumulativ fordeling $F_k(s | S_{k+1}) = (s / S_{k+1})^k$ for $0 \leq s \leq S_{k+1}$, gjeldende for $k=1, 2, \dots, n-1$. Med n monotont voksende kumulative fordelinger og n uavhengige $U_1, U_2, \dots, U_n$ Uniform[0,1] anvender vi invers-metoden, og får

$$F_n(S_n) = (S_n)^n = U_n \quad \& \quad F_k(S_k | S_{k+1}) = (S_k / S_{k+1})^k = U_k, \text{ for } k=1, 2, \dots, n-1$$

Dette gir (ubetinget)

$$S_n = (U_n)^{1/n} \quad \& \quad S_k = (U_k)^{1/k} S_{k+1} \text{ for } k=n-1, n-2, \dots, 2, 1.$$

Koordinatene er da gitt ved $X_1 = S_1$ og $X_k = S_k - S_{k-1}$ for $k=2, 3, \dots, n$.

For tetraederet får vi med $n=3$ simuleringsformelen:

$$(X_1, X_2, X_3) = (\sqrt[3]{U_3} \cdot \sqrt{U_2} \cdot U_1, \sqrt[3]{U_3} \cdot \sqrt{U_2} \cdot (1 - U_1), \sqrt[3]{U_3} \cdot (1 - \sqrt{U_2}))$$

Her har selvfølgelig hver komponent samme fordeling, og komponentene kan permuteres. Den korresponderende barysentriske løsningen er pga. summasjon til 1 gitt ved

$$(X_0, X_1, X_2, X_3) = (1 - \sqrt[3]{U}, \sqrt[3]{U_3} \cdot \sqrt[3]{U_2} \cdot U_1, \sqrt[3]{U_3} \cdot \sqrt[3]{U_2} \cdot (1 - U_1), \sqrt[3]{U_3} \cdot (1 - \sqrt[3]{U_2}))$$

og nye løsningsvarianter får vi ved å velge ut tre av disse komponentene for simuleringen og også permutere disse. Denne metode, utledet på en annen måte, er benyttet av Eivind Stensholt ved NHH i sine studier av valgordninger.

Problemstillinger knyttet til simplekser og barysentriske koordinater finner vi på mange områder, ofte som representasjon av andeler for kategoriske data. Det gjelder i første rekke samfunnsfag og adferdsfag, eksempelvis i sosiologi og demografi. Det er nyttig både for teoretisk analyse og grafisk illustrasjon, som oftest med trekant for tre kategorier. Det gjelder både rent empirisk, f.eks. utvikling over tid, og generering av scenarier ved simulering. Innen naturvitenskap finner vi simplekser anvendt i kjemi og geologi, blant annet som bestanddeler ved prøvetaking. I operasjonsanalyse og i industriell sammenheng finner vi simplekser ved optimalisering av blandingsforhold og innen IT forekommer det i algoritmer, blant annet ved konstruksjon av grafikk.

[Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 57 Løsning

La sannsynligheten for at A vinner/B vinner et parti være henholdsvis a/b , slik at sannsynligheten for remis er $r = 1 - (a + b)$. Betegn de mulige utfall av hvert parti med R, A og B.

La p_i være sannsynligheten for at A blir mester gitt siste part med utfall i ($i=R,A,B$). Med et fiktivt 0'te remis-parti er den søkte sannsynlighet det samme som p_R . Da har vi

$$\begin{aligned}p_R &= r \cdot p_R + a \cdot p_A + b \cdot p_B \\p_A &= r \cdot p_R + a \cdot 1 + b \cdot p_B \\p_B &= r \cdot p_R + a \cdot p_A + b \cdot 0\end{aligned}$$

Ved eliminasjon av p_A og p_B får vi den søkte sannsynlighet

$$p_R = \frac{a^2(1+b)}{a^2(1+b) + b^2(1+a)}$$

Innsetting av $a = 0.30$, $b = 0.20$ gir $p_R = \frac{27}{40} = 0.675$.

Som ventet er denne sannsynligheten noe høyere enn sannsynligheten 0.60 for at A er vinner av et enkelt ikke-remis parti.

Forventet antall partier som trengs til vinneren er kåret kan utledes på tilsvarende måte. La f_i være forventet antall partier gitt siste part med utfall i ($i=R,A,B$). Med et fiktivt 0'te remis-parti har vi tre ligninger

$$\begin{aligned}f_R &= 1 + r \cdot f_R + a \cdot f_A + b \cdot f_B \\f_A &= 1 + r \cdot f_R + a \cdot 1 + b \cdot f_B \\f_B &= 1 + r \cdot f_R + a \cdot f_A + b \cdot 1\end{aligned}$$

som gir løsningen

$$E(N) = f_R = \frac{1 + a + b + ab}{a^2(1+b) + b^2(1+a)}$$

Innsetting av $a = 0.30$, $b = 0.20$ gir $E(N) = \frac{780}{33} = 23.64$. Altså: Vi risikerer at det tar uforholdsmessig lang tid å kåre klubbmesteren. Verre blir det dersom remishyppigheten er høyere og/eller A og B er tilnærmet like gode. Det trer klarere fram med følgende alternative formel for forventet antall partier:

$$E(N) = \frac{2 - r + ab}{(1 - r)^2 - (1 + r)ab}$$

Her vil kvadratet i nevner dominere og for gitt r vil ab maksimeres når de er like store.

Merknad. Problemstillingen kan alternativt studeres som en Markovkjede med fem tilstander: R, A, B, A^*, B^* , de tre første er utfallet av sist spilte part, og de to siste er de absorberende tilstander når henholdsvis A og B har vunnet matchen. Overgangsmatrisen blir

$$\begin{array}{c} R \\ A \\ B \\ A^* \\ B^* \end{array} \begin{array}{ccccc} R & A & B & A^* & B^* \\ \left[\begin{array}{ccccc} r & a & b & 0 & 0 \\ r & 0 & b & a & 0 \\ r & a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

Matrisen har følgende struktur

$$\begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Våre resultater kan avledes av fundamentalmatrisen

$$F = (I - Q)^{-1} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} 1 - ab & a(1 + b) & b(a + 1) \\ r(1 + b) & 1 - r(1 + b) & b \\ a(1 + b) & a & 1 - r(1 + a) \end{bmatrix}$$

der

$$d = (1 - r)^2 - (1 + r)ab = a^2 + b^2 + (1 - r)ab = a^2(1 + b) + b^2(1 + a).$$

Første linje i matrisen F angår start i den fiktive starttilstand R . Sannsynligheten for absorpsjon i hver av de to tilstandene A^* og B^* finnes som elementene i første linje i matrisen FR , mens forventet antall trinn til absorpsjon i en av de to tilstandene finnes som toppelementet i vektoren Fe , der e er kolonnevektoren med 1-tall. Dette gir resultatene ovenfor.

[Innholdsliste](#)

[Pusleri nr. 58](#) Løsning

Betrakt generelt situasjonen med n_1 menn og n_2 kvinner tilfeldig oppstilt. Vi vil finne sannsynlighetsfordelingen til antall oppdragspar X etter regelen g/m=gunstige på mulige. Vi søker spesielt $(n_1, n_2) = (5, 4)$. Her er mønstret for en mulig oppstilling av de 9 rekruttene

MKMMKMKMMK

En mann og en kvinne vil stå ansikt til ansikt ved hver MK, dvs. M etterfulgt av K regnet fra venstre mot høyre. I den gitte oppstillingen skjer det tre steder. Dette er bare ett av 126 mulige mønstre, og bestemmelse av antall mønstre med et gitt antall slike par x krever tilsynelatende en komplisert opptelling. Betrakt det enklere tilfellet $(n_1, n_2) = (3, 2)$, der vi bare har følgende $m = 10$ mulige mønstre:

KKMMM	MKKMM	KMKMM	KMMKM	KMMM
MMKKM	MMMKK	MKMKM	MKMMK	MMKMK

Her forekommer ikke MK i det første mønstret, forekommer en gang i de seks neste og to ganger i de tre siste mønstrene. Altså har vi antall gunstige (g) og antall mulige (m) som følger

Antall team x	0	1	2	Mulige m
Gunstige g	1	6	3	10

Tilsvarende får vi (med en programsnutt til hjelp i opptellingen):

	$(n_1, n_2) = (5, 4)$					
Antall team x	0	1	2	3	4	Mulige m
Gunstige g	1	20	60	40	5	126

Resultatene er forenlig med den generelle formelen

$$P(X = x) = \frac{\binom{n_1}{x} \cdot \binom{n_2}{x}}{\binom{n_1+n_2}{x}} , \quad x = 0, 1, \dots, \min(n_1, n_2)$$

Vi ser at telleren er det samme som antall måter vi kan plukke ut x menn fra de n_1 menn og x kvinner fra n_2 kvinnene til deltakelse i et eller annet team. Har vi med dette funnet en snarvei til løsningen? Nei! Utvalg av personer må ikke forveksles med vårt utvalg av plasser!

Uttrykket gjenkjennes som en hypergeometrisk fordeling med parametere $(n_1 + n_2, n_1, n_2)$, der n_1 og n_2 kan bytte plass. Likevel er det ikke åpenbart hvordan dette kan begrunnes ved enkel kombinatorikk (se nedenfor). Forventningen er

$$E(X) = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} .$$

Denne kan utledes enkelt uten kjennskap til den eksakte fordeling (se til slutt).
Antall rekrutter på drittjobben er $Y = n_1 + n_2 - 2X$ med forventning

$$E(Y) = n_1 + n_2 - 2E(X) = \frac{n_1^2 + n_2^2}{n_1 + n_2}$$

For situasjonen $(n_1, n_2) = (5, 4)$ blir $E(X) = 20/9$ og $E(Y) = 41/9$. Altså er forventet antall personer til drittjobben marginalt større enn forventet antall personer til oppdragsteam 40/9.

Generell begrunnelse (etter innspill av Per Manne): Oppstilling av de $n = n_1 + n_2$ personene i tilfeldig rekkefølge innebærer at alle $n!$ rekkefølger er like sannsynlige. Dette medfører at alle mønstre med n_1 menn og n_2 kvinner er like sannsynlige. Antall slike er antall måter å velge de n_1 mennenes plass blant de $n_1 + n_2$ plassene i rekkefølgen, dvs. $m = \binom{n_1 + n_2}{n_1}$. For å finne antall oppstillinger som medfører akkurat x oppdragsteam kan vi gå fram slik: Still opp n_1 mennene på rekke, og velg ut de x som hver skal inngå i et av de x oppdragsteamene. Dette kan gjøres på $\binom{n_1}{x}$ måter. For ethvert slikt valg skal vi plassere inn de n_2 kvinnene slik at det er minst en kvinne rett til høyre for hver av de x mennene som skal være med i oppdragsteamet. Så la oss gjøre det, og vi har igjen $n_2 - x$ kvinner som må plasseres uten å skape noen nye oppdragsteam. Det er $x+1$ steder hvor disse $n_2 - x$ kvinnene kan plasseres, enten til venstre for alle mennene, eller rett til høyre for en av de x kvinnene som vi allerede har plassert. På hvor mange måter kan dette gjøres? Her kan en bruke følgende kombinatoriske resultat: Fordel n like objekter til r navngitte bokser (der enkelte tomme bokser tillates). Dette kan gjøres på $\binom{n+r-1}{r-1}$. I vår situasjon tilsvarer det å sette $n = n_2 - x$ og $r = x + 1$, som innsatt gir $\binom{n_2}{x}$.

Til sammen gir dette antall gunstige oppstillinger for x oppdragsteam lik $g = \binom{n_1}{x} \cdot \binom{n_2}{x}$.

Den søkte sannsynlighet er da g/m som bekrefter påstanden ovenfor.

Den benyttede kombinatoriske formel har ofte betegnelsen «Stars and bars», etter måten den kan forklares: Dersom de n objektene stilles opp på rekke kan plasseringen i navngitte bokser markeres med vertikale streker som skilletegn. Med r bokser trengs $r-1$ skilletegn. Eksempelvis med $n=4$ og $r=3$ betyr $**|*|*$ to objekter i den første boksen og et objekt i de to neste boksene, mens $**|**|$ betyr to objekter i de to første boksene og ingen i den tredje boksen. Det er i alt $n+r-1$ symboler, og plasseringsalternativene fremkommer ved å velge de $r-1$ strekene blant disse (eller ekvivalent de n stjernene).

Kommentarer:

1. «Stars and bars» brukes ofte som navn på den kombinatoriske formel vi har benyttet ovenfor, etter måten den kan forklares: Dersom de n objektene stilles opp på rekke kan plasseringen i navngitte bokser markeres med vertikale streker som skilletegn. Med r bokser trengs $r-1$ skilletegn. Eksempelvis med $n=4$ og $r=3$ betyr $**|*|*$ to objekter i den første boksen og et objekt i de to neste boksene, mens $**|**|$ betyr to objekter i de to første boksene og ingen i den tredje boksen. Det er i alt $n+r-1$ symboler, og plasseringsalternativene fremkommer ved å velge de $r-1$ strekene blant disse (eller ekvivalent de n stjernene). «Stars and bars»-problemer kan dukke opp i mange

sammenhenger, eksempelvis: På hvor mange måter kan vi skrive et heltall n som en sum av akkurat r positive heltall? Hadde det her stått ikke-negative heltall ville dette vært ekvivalent med problemstillingen ovenfor med svar $\binom{n+r-1}{r-1}$. Situasjonen med kun positive heltall er imidlertid ekvivalent med å først legge et objekt i hver boks og så plassere de $n-r$ gjenværende i de r boksene. Vi kan derfor erstatte n med $n-r$ i formelen, og får isteden antallet $\binom{n-1}{r-1}$.

2. Tilbake til forventningen til X uten å kjenne den eksakte fordeling: X kan skrives som sum av $n_1 + n_2 - 1$ indikatorvariable, en for hver posisjoner å plassere M etterfulgt av K . For hver slik har vi sannsynligheten

$$P(MK) = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \cdot \frac{n_2}{n_1 + n_2 - 1}$$

Forventningen til X som sum av indikatorer er summen av $n_1 + n_2 - 1$ forventninger som hver er lik $P(MK)$, slik at $E(X) = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}$. Merk at den hypergeometriske variable X her er representert ved indikatorer som ikke har samme parvise korrelasjoner, men avhenger av om indikatorene er «naboer» eller ikke.

3. Et alternativ til rekruttene tilfeldig oppstilt på linje vil være å ha dem tilfeldig oppstilt i sirkel. Dette kan analyseres på tilsvarende måte, og de to oppstillingene kan danne grunnlaget for en diskusjon av begrepet rettferdighet.

[Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 59 Løsning

La oss først belyse konsekvensene av ulik adferd ved et enkelt eksempel, der vi har $m=4$ parkeringslommer og $n=3$ før ankomne biler. Etter de to første ankomstene har vi 6 mulige mønstre, hvert representert ved hver sin linje i tabellen, der kryss x markerer opptatt plass. Ved tilfeldig plassvalg er disse 6 mønstre like sannsynlige. Etter den tredje ankomne vil situasjonen bli ulik, alt ettersom denne velger en av de to ledige lommene tilfeldig, med omtenksomhet, med lukefrykt eller med infamitet. For Lukas er det nå en plass igjen, og sannsynlighetene for at han må lukeparkere er gitt i tabellen for de fire ulike situasjonene

To først ankomne				Tredje ankomne				
Mønster				Sannsynlighet	Tilfeldig	Omtenksom	Lukeredd	Infam
	x	x		1/6	0	0	0	0
x	x			1/6	1/2	0	1/2	1
		x	x	1/6	1/2	0	1/2	1
x		x		1/6	1/2	0	1	1
	x		x	1/6	1/2	0	1	1
x			x	1/6	1	1	1	1
P(Lukas må lukeparkere) ->					3/6	1/6	4/6	5/6

Her er antatt at de to først ankomne velger plasser tilfeldig. Dersom det ikke spiller noen rolle for dem, hadde det selvsagt vært en fordel for Lukas at ingen av dem valgte en ytterplass. Med omtenksomhet kan disse frita Lukas for lukeparkering, uansett om den tredje ankomne ønsker å være infam. På den annen side, dersom de to første er infame, kan de velge ytterplassene, og Lukas må lukeparkere uansett om den tredje ankomne ønsker å være omtenksom. Selv om den først ankomne med en viss omtanke kjører helt fram, så kan nummer to spolere hensikten med dette ved å velge den bakerste plassen, muligens infamt, men kanskje at der kan en i hvert fall ikke bli innklemmt. Betrakningene ovenfor gjelder mer generelt, Pukas er tjent med at ytterplassene er ledige lengst mulig. Leseren inviteres til å utrede tilfellet $m=5$, $n=3$.

Betrakt så situasjonen med $m=8$ og $n=6$, der alle forutkomne velger parkeringslomme tilfeldig. Med regelen om «gunstige på mulige» får vi at sannsynligheten for å måtte lukeparkere blir:

$$P = \frac{g}{m} = \frac{10}{\binom{8}{6}} = \frac{10}{28}$$

Argumentet for antall gunstige i teller er som følger: Med seks før ankomne biler kan tre hovedmønstre forekomme der han er nødt til å lukeparkere. Disse er angitt i tabellen nedenfor med en egnet tallmessig representasjon, som er antall biler mellom ledige enkeltlommer i kjøreretningen. De øvrige mønstre er permutasjoner av disse tallene, og antall permutasjoner er henholdsvis 6, 3 og 1 for de tre hovedmønstre, i alt $6+3+1= 10$ mønstre.

Mønster								Representasjon	Antall
x		x	x		x	x	x	123	6

x		x	X	x	x		x	141	3
x	x		x	x		x	X	222	1

Generell formel med m parkeringslommer og n parkerte biler:

$$P(L) = \frac{\binom{n-1}{m-n}}{\binom{m}{n}}$$

Argumentasjon for teller: I et mønster der en må lukeparkere er begge endeplassene besatt. Tenk deg de n parkerte bilene på rad med sine n-1 mellomrom, dvs. uten parkeringslommer. Et for oss gunstig mønster fås ved å velge m-n mellomrom hvor vi kan skyte inn en enkelt parkeringslomme blant de n-1 tilgjengelige mellomrom. Det kan gjøres på $\binom{n-1}{m-n}$ måter.

Alternativt kan en ta utgangspunkt i den tallmessige representasjonen eksemplifisert ovenfor. Denne innebærer at problemet er ekvivalent med å telle opp antall måter å skrive tallet n som en sum av r=m-n+1 positive heltall. Ifølge kommentar i løsningen til Pusleri nr. 58 er det

$$g = \binom{n-1}{r-1}, \text{ som innsatt for r gir det ønskede resultat.}$$

Beregning av teller og nevner i formelen opp til (m,n)=(9,9) gir følgende resultat (før forkortning). Her svarer diagonalen med enere til at det er ingen ledige plasser, og Lukas må finne annen parkering.

m\n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1								
2	0	1							
3	0	1/3	1						
4		0	2/4	1					
5		0	1/10	3/5	1				
6			0	3/15	4/6	1			
7			0	1/35	6/21	5/7	1		
8				0	4/56	10/28	6/8	1	
9				0	1/126	10/84	15/36	7/9	1

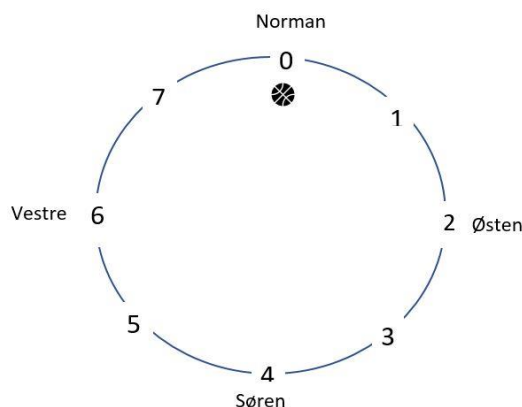
For tilfellet at de to først ankomne velger hver sin ytterplass, og de øvrige velger tilfeldig har vi

$$P_2(L) = \frac{\binom{n-1}{m-n}}{\binom{m-2}{n-2}}, \text{ slik at } P_2(L) = \frac{m(m-1)}{n(n-1)} \cdot P(L). \text{ I tilfellet } (m,n)=(8,6) \text{ med } P(L) = \frac{10}{28}, \text{ blir}$$

$$P_2(L) = \frac{2}{3}.$$

Pusleri nr. 60 løsning

Vi kan like gjerne studere problemet for vilkårlig n , og tegner her en figur med $n=7$, der trener er gitt nr. 0, og spillerene nr. 1,2,...,7 med urviserene. I tillegg er navngitt personer i hver av fire himmelretninger.



Situasjon (a): Antall ballutvekslinger kan betraktes som summen av «ventetidene» fra en ny deltaker med ballen til den neste nye. Med $n+1$ personer og start hos treneren har den første spiller ballen etter 1 tidsenhet, og sannsynligheten for at denne sender ballen videre til en ny spiller (og ikke treneren) er $(n-1)/n$. Går ballen tilbake til trener, er det på nytt sannsynlighet $(n-1)/n$ for at neste mottaker er en ny spiller, og så videre. Vi har derfor en geometrisk fordelt ventetid med forventning $n/(n-1)$. Når akkurat k spillere har fått kjent på ballen er sannsynligheten for at neste mottaker er en ny spiller lik $(n-k)/n$ med forventet ventetid $n/(n-k)$, som vil gjelde for $k=0,1,\dots,n-1$. Forventet ventetid F_n til alle n spillere har fått kjent på ballen er dermed summen av disse

$$F_n = n \cdot (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}) \text{ for } n \geq 1$$

Vi ser at $F_n = n \cdot H_n$, der H_n er den såkalte harmoniske rekken. Beregning gir for $n=1,2,\dots,9$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	1.0	3.0	5.5	8.3	11.4	14.7	18.2	21.7	25.5

Her er for $n=5$ $F_5 = 137/12 \approx 11.4$.

Alternative opplegg: Dersom vi isteden antar at hver deltaker ikke returnerer ballen umiddelbart til avsender, får vi isteden $F_n = 1 + (n-1) \cdot H_{n-1}$ med $F_5 = 1 + 25/3 \approx 9.3$. Dersom vi antar at ballen også må være innom treneren minst en gang etter starten blir isteden $F_n = 1 + n \cdot H_n$ med $F_5 = 1 + 137/12 \approx 12.4$. Dersom vi antar at treneren står utenfor ringen, og starter det hele ved å kaste ballen til en tilfeldig spiller blir $F_n = (n-1) \cdot H_{n-1}$ med $F_5 = 25/3 \approx 8.3$. Endelig har vi opplegg der hver deltaker ikke har lov å sende ballen på nytt til samme person. Dette er nok litt vanskeligere.

Situasjon (b): Kan oppfattes som sirkulær tilfeldig gang («circular random walk»).

Sentrale egenskapene ved (lineær) tilfeldig gang bør være kjent for de fleste, men er de ukjente eller glemt, gjengis to resultater vi kan få bruk for i et Appendix ved slutten av løsningen. Vi vil likevel være på utkikk etter argumenter som ikke krever disse resultatene.

Med $n+1$ personer i sirkel, treneren og n spillere, kan vi registrere ballens posisjon med tallene $0,1,2,\dots,n$, der vi starter med ballen i trenerens posisjon 0.

La X_t være ballens posisjonen etter utveksling nr. t , $t=1,2,3,\dots$ med start i $X_0=0$. Tilfeldig gang i sirkel kan da representeres med en tilfeldig gang på tallinjen X_t^* , med start i $X_0^*=0$, der vi observerer

resten modulo $n+1$, dvs. $X_t = X_t^* \pmod{n+1}$. Innom alle posisjoner på sirkelen har vi straks vi har vært innom $n+1$ ulike verdier på tallinjen, verdier som nødvendigvis må ligge som et sammenhengende område uten hull (der 0 var med fra starten av).

Vi skal finne F_n = forventet tid til vi har besøkt $n+1$ ulike verdier på tallinjen.

Betrakt situasjonen straks vi har n ulike verdier. Disse vil også utgjøre et sammenhengende område, der vi nå befinner oss nederst eller øverst. Uansett får vi en ny verdi ved å gå enheten 1 i samme retning eller n enheter i motsatt retning. Herfra er problemet som det velkjente «Gamblers ruin» med forventet ventetid til enden av intervallet lik produktet av de to avstandene fra der vi er, nemlig $1 \cdot n = n$ (jfr. Appendiks). Vi har derfor for $n=1,2,3,\dots$ med $F_0=0$ at

$$F_n = F_{n-1} + n \text{ for } n \geq 1$$

Forventet tid til n ulike sifre blir derfor summen av tallene fra 1 til n , som er

$$F_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

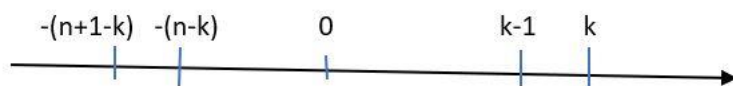
Som sagt ovenfor motsvarer dette forventet antall ballutvekslinger til alle har fått kjenne på ballen. For $n=5$ får vi $F_5=15$. Vi ser at forventningen er forenlig med summen av $n+1$ like forventninger $n/2$, svarende til at hver person har etter starten like forventet antall berøringer med ballen. Alternativt kan en betrakte sum av n forventninger lik $(n+1)/2$. En kan spørre om dette kan være nøkkelen til en alternativ utledning av formelen uten kjennskap til resultatet for tilfeldig gang gitt i Appendiks. I hvert fall har vi sannsynliggjort at påstanden i oppgaven kan være riktig. Som en kuriositet nevnes at formelen fremkommer direkte i følgende alternative opplegg: Utfør myntkast i n omganger, der ballen i hver omgang enten går ett skritt med urviseren eller n skritt mot urviseren, og i begge tilfeller ender opp hos den neste spiller i sirkelen. I dette opplegg er det altså mulig at alle får kjenne ballen i løpet av den første omgangen, men også muligheten for at n omganger kreves. Kommentar. Problemstillinger knyttet til å rekke over alle tilstander blir ofte omtalt som «cover problems». Slike er blant annet studert i forbindelse med grafer og nettverk i datafaget, gjerne for å belyse tidsforbruk. Det er forholdsvis få eksempler på eksakte løsninger, og den generelle teorien er i hovedsak basert på skranker for forventninger.

Er sannsynligheten for å være den siste som får kjenne på ballen lik for alle?

For (b) kan man forestille seg at spilleren lengst vekk fra treneren har størst sjanse for å være den siste som mottar ballen. At dette ikke er tilfelle, og at avstanden til treneren ikke spiller noen rolle, kan vises generelt på flere måter: (1) Rent analytisk (litt strev), (2) Betinging. dreining og symmetri (lite strev) og (3) Sammenkobling (uten strev).

(1) Analytisk

Vi ser muligheten for å bruke egenskap ved tilfeldig gang på tallinjen gitt i Appendiks): Ved start i 0 er sjansen for å nå opp til $+b$ før ned til $-a$ lik $a/(a+b)$. Dette gjelder også uansett startpunkt med a og b som avstandene til startpunktet. La oss brette ut den tilfeldige gang på sirkelen og markere spiller nr. k på den positive siden, som tilsvarer posisjon modulo $n+1$ på den negative side, dvs. $-(n+1-k)$.



Betrakt så situasjonen rett før spiller nr. k får ballen som sistemann. Ballen må da hele tiden ha vært i området fra $-(n-k)$ til $k-1$, og nå befinne seg i ett av de to endepunktene. Vi har derfor to gjensidig utelukkende forløp:

Forløp 1: Innom $k-1$ før $-(n-k)$ (dvs. $b=k-1$ og $a=n-k$), og deretter ved start i $k-1$ nå $-(n-k)$ før k (dvs. $b=n-1$ og $a=1$).

Forløp 2: Innom $-(n-k)$ før $k-1$ (dvs. $b=n-k$ og $a=k-1$), og deretter ved start i $-(n-k)$ nå $k-1$ før $-(n+1-k)$ (dvs. $b=n-1$ og $a=1$).

Sammenholdt gir dette ved gjentatt bruk av formelen ovenfor

$$\frac{n-k}{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{k-1}{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \text{ for } k=1, 2, \dots, n$$

Altså har hver spiller samme sjanse for å være den siste som får kjenne på ballen.

Betrakt alternativt situasjonen der treneren er utenfor sirkelen og kaster ballen til en tilfeldig spiller som så starter ballutvekslingen mellom spillerne i sirkelen. Situasjonen er derfra den samme som ovenfor, med denne spilleren i rollen som trener, og med $n-1$ spillere istedenfor n . For at spiller nr. k skal bli den siste med ball, må en først unngå å bli starteren. Vi får derfor sannsynligheten

$$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}, \text{ for } k=1, 2, \dots, n$$

dvs. alle n spillere har samme sannsynlighet. Dette er ikke overraskende, siden vi her godt kunne appellere til symmetrien i problemet.

(2) Betinging og symmetri:

La det for enkelhets skyld være et odde antall spillere, slik at $n=2m+1$. Treneren har da akkurat en spiller på motsatt side av sirkelen, lengst vekk fra seg. La p_0 være sannsynligheten for at denne spilleren er den siste som mottar ballen, og la p_k for $k=1, 2, \dots, m$ være sannsynligheten for at en spiller k plasser til side for denne er den siste.

Beting med omsyn til utfallet av første ballkast, til høyre eller til venstre. Vi har da

$p_0 = 1/2 \cdot p_1 + 1/2 \cdot p_1$ som gir $p_1 = p_0$. Vi har her brukt at etter første ball er utvekslet har vi en dreid situasjon med ny startperson der vi spør etter sannsynligheten for at spiller en plass til side for den motsatte av den nye startpersonen er den siste. I den nye situasjonen vil riktignok en sidemann til startpersonen allerede ha hatt ballen, men dette får ingen innvirkning, da denne uansett må besøkes på nytt for å nå alle de andre.

Dette resonnerementet kan utvides ved å betinge med omsyn til hvilken av de to posisjonene som er k posisjoner til side for den lengst vekk som først mottar ballen, foreta dreining til ny startperson og bruke argumentet om allerede besøkte personer er uten betydning. Vi har da $p_k = p_1$; $k=1, 2, \dots, m$, slik at $p_k = 1/n$; $k=0, 1, 2, \dots, m$. Dette betyr likhet for alle n spillere.

(3) Sammenkobling

Betrakt to spillere A og B i sirkelen, der vi uten tap av generalitet antar at A står motsatt treneren (O) og B står på en plass før A, eksemplifisert i figuren med O=Norman, A=Søren og B=Østen. I fokus er to realiseringer av sirkulær tilfeldig gang med start hos O, en som ender hos A og en som ender hos B, begge etter å ha vært innom alle de andre først. Tenk deg nå sirkelen dreid med urviseren, slik at B overlapper A. Vi har da omgjort situasjonen til tilfeldig gang med ulike startpunkter og samme endepunkt. Anta at vi modifiserer den realiserte tilfeldige gang for B som følger: Straks de to prosessene møtes (vil skje med sannsynlighet 1), erstatt det videre forløp med A sitt videre forløp. Denne konstruksjonen gir en tilfeldig gang for B som ender opp samme sted som den for A, og der begge oppfyllt kravet om å være innom de andre først. Her må det avklares at de spillere for B-prosessen som ikke har fått ballen før dette møtet, er sikret å få den etter møtet og før B får den. Dette er opplagt fordi eventuelle manglende besøk for B-prosessen ligger før møtepunktet, og der har A-prosessen ennå ikke vært.

Vi har nå oppnådd at for enhver realisasjon som oppfyller kravet for A, har vi en entydig likeverdig realisasjon for B, dvs. like lang og oppfyller kravet. Sannsynligheten for en realisasjon som oppfyller kravet som siste mottaker må derfor være lik for A og B.

Argumentasjonen faller under merkelappen «coupling», en generell teknikk som kan brukes i mange sammenhenger som erstatning for mer krevende analytiske utregninger.

Tanken går tilbake til forventet tid til alle har fått kjenne på ballen. Fins det også her en enkel alternativ argumentasjon som ikke krever resultatet i Appendiks, men som eventuelt gjør bruk av at vi nå vet at alle spillere har samme sjanse for å være den siste?

Appendiks:

La $X_t; t = 0, 1, 2, \dots$ være tilfeldig gang på heltallslinjen, dvs. $X_t = X_{t-1} + \epsilon_t; t = 1, 2, 3, \dots$, der ϵ_t 'ene er uavhengige med $\epsilon_t = \pm 1$ med like sannsynligheter $\frac{1}{2}$.

Betrakt intervallet fra -a til +b med start i 0, dvs. $X_0 = 0$. Da er

1. Sannsynligheten for å nå opp til +b før ned til -a lik $a/(a+b)$.
2. Forventet antall skritt til en av skrankene -a eller +b nåes er $a \cdot b$.

Dette gjelder også uansett startpunkt med a og b som avstandene til startpunktet.

De to påstandene blir typisk bevist ved å etablere to enkle differenslikninger, og løse disse.

Refleksjon: Kan de to påstandene sannsynliggjøres på annet vis?

[Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 61 Løsning

Brukertypene: A=Følger skilrutinen, B=Følger skilrutinen ved inngang, men glemmer den ved utgang, C=Ignorerer skilrutinen.

Definer følgende begivenheter:

L = Ledig toalett, O = Opptatt toalett, S_L = Skilt viser ledig, S_O = Skilt viser opptatt.

La A, B, C som begivenheter bety at person av gitt type er bruker/siste bruker av toalettet.

Vi kan representere begivenhetene i et diagram med to kolonner, der den venstre representerer skiltets markering når toalettet er opptatt med person av gitt type, og den høyre kolonnen skiltets markering etter at denne personen har forlatt toalettet. De ulike antatte sannsynligheter er representert med arealer. Vi ser at person A og B begge har Opptatt-skiltet på når de er inne (rødt), og at A slår over til Ledig ved utgang (grønt), mens B ikke gjør det (fortsatt rødt). For C gjelder at skiltet kan vise Opptatt (rødt) eller Ledig (grønt) ved ankomst, og det forblir slik også etter at C har forlatt toalettet.

	O	L
A	S_O	S_L
B	S_O	S_O
C	S_O	S_L

Vi har ifølge forutsetningene: $P(O)=P(L)=1/2$ og $P(A)=P(B)=P(C)=1/3$.

I figuren er det også antatt at de to mulighetene som C møter er like sannsynlige, og forblir slik. Med disse antakelsene kan vi betrakt det indre av figuren som et rektangel med areal 1, sammensatt av 12 like store rektangler, hver med areal $1/12$. Ubetingede sannsynligheter gis da som arealer, og betingede sannsynligheter som forhold mellom arealer. Med dette er beregningen redusert til optelling av antall $1/12$ -rektangler. Vi får

Ubetingede sannsynligheter: $P(S_O)=8/12=2/3$, $P(S_L)=4/12=1/3$.

Betingede sannsynligheter: $P(S_O | O)=5/6$, $P(S_L | L)=3/6$, $P(O | S_O)=5/8$, $P(L | S_L)=3/4$

Antakelsen om lik sannsynlighet for de to situasjonene et C-individ står overfor kan synes ad hoc.

Forsøk på formalisering krever tilsynelatende en bedre forståelse av situasjonen.

Gitt at dørskiltet viser Opptatt, har vi fire gjensidig utelukkende situasjoner:

1. Toalettet er opptatt av en A-bruker
2. Toalettet er opptatt av en B-bruker
3. Toalettet er opptatt av en C-bruker, og siste ikke-C bruker før denne var B-bruker.
4. Toalettet er ledig, og den siste ikke-C bruker forut var en B-bruker.

Gitt at dørskiltet viser Ledig, har vi to gjensidig utelukkende situasjoner:

5. Toalettet er ledig, med følge av at den siste ikke-C bruker må ha vært en A-bruker
6. Toalettet er opptatt med en C-bruker, og siste ikke-C bruker forut var A-bruker.

Man kan også reflektere over om rekkefølgen av de besøkendes type, regelmessig eller tilfeldig, spiller noen rolle. Vil regelmessighet være annerledes enn tilfeldighet?

Med den forståelsen som pkt. 1-6 gir oss, har vi flere muligheter for analyse. En mulighet er beregning via betinging og bruk av Bayes' formel

$$P(O|S_O) = \frac{P(O) \cdot P(S_O|O)}{P(S_O)}$$

En annen mulighet er å beskrive situasjonen som en Markovkjede med seks tilstander, der vi kan lese ut svar via de stasjonære sannsynlighetene.

For begge metoder gjelder at vi like godt betrakte den mer generelle formulering der $P(O) = h$, $P(L) = 1 - h$ og $P(A) = p$, $P(B) = q$, $P(C) = r$, med $p + q + r = 1$. Her følger beregning ved betinging. Vi får ved å betinge mhp. (den siste) besøkendetype

$$\begin{aligned} P(S_O|O) &= P(A) \cdot P(S_O|O \cap A) + P(B) \cdot P(S_O|O \cap B) + P(C) \cdot P(S_O|O \cap C) \\ &= p \cdot 1 + q \cdot 1 + r \cdot \frac{q}{p+q} \end{aligned}$$

Forklaring: Gitt at toalettet virkelig er opptatt (O), har vi tre muligheter: Opptatt med A, B eller C. I de to første tilfellene vil skiltet vise opptatt (S_O) med sannsynlighet 1. I det siste tilfellet (C) viser skiltet opptatt (S_O) bare dersom den nærmeste foregående ikke-C besøkende var B-person, og sannsynligheten for det er $q/(p+q)$. Videre får vi

$$\begin{aligned} P(S_O|L) &= P(A) \cdot P(S_O|L \cap A) + P(B) \cdot P(S_O|L \cap B) + P(C) \cdot P(S_O|L \cap C) \\ &= p \cdot 0 + q \cdot 1 + r \cdot \frac{q}{p+q} \end{aligned}$$

Forklaring: Gitt at toalettet virkelig er ledig (L), har vi tre muligheter: Ledig og nettopp forlatt av persontype A, B eller C. I det første tilfellet (A) vil skiltet vise opptatt (S_O) med sannsynlighet 0, og i det andre (B) vise opptatt med sannsynlighet 1. I det siste tilfellet (C) viser skiltet opptatt (S_O) bare dersom den nærmeste foregående ikke-C besøkende var B-person, og sannsynligheten for det er også $q/(p+q)$.

Av dette følger

$$\begin{aligned} P(S_O) &= P(O) \cdot P(S_O|O) + P(L) \cdot P(S_O|L) \\ &= h \cdot \left(p + q + r \cdot \frac{q}{p+q} \right) + (1-h) \cdot \left(q + r \cdot \frac{q}{p+q} \right) \\ &= h \cdot p + q + r \cdot \frac{q}{p+q} \end{aligned}$$

Bayes' formel gir da

$$P(O|S_O) = \frac{P(O) \cdot P(S_O|O)}{P(S_O)} = \frac{h \cdot \left(p + q + r \cdot \frac{q}{p+q} \right)}{h \cdot p + q + r \cdot \frac{q}{p+q}}$$

Tilsvarende får vi

$$\begin{aligned} P(S_L|L) &= P(A) \cdot P(S_L|L \cap A) + P(B) \cdot P(S_L|L \cap B) + P(C) \cdot P(S_L|L \cap C) \\ &= p \cdot 1 + q \cdot 0 + r \cdot \frac{p}{p+q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(S_L|O) &= P(A) \cdot P(S_L|O \cap A) + P(B) \cdot P(S_L|O \cap B) + P(C) \cdot P(S_L|O \cap C) \\ &= p \cdot 0 + q \cdot 0 + r \cdot \frac{p}{p+q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(S_L) &= P(O) \cdot P(S_L|O) + P(L) \cdot P(S_L|L) \\
&= h \cdot r \cdot \frac{p}{p+q} + (1-h) \cdot (p+r \cdot \frac{p}{p+q}) \\
&= (1-h) \cdot p + r \cdot \frac{p}{p+q}
\end{aligned}$$

Bayes' formel gir da

$$\begin{aligned}
P(L|S_L) &= \frac{P(L) \cdot P(S_L|L)}{P(S_L)} \\
&= \frac{(1-h) \cdot (p+r \cdot \frac{p}{p+q})}{(1-h) \cdot p + r \cdot \frac{p}{p+q}} \\
&= \frac{(1-h) \cdot \frac{p}{p+q}}{\frac{p}{p+q} - hp}
\end{aligned}$$

For tilfellet $h=1/2$ og $p=q=r=1/3$, får vi

Sannsynlighet	$P(S_O)$	$P(S_O O)$	$P(O S_O)$	$P(S_L)$	$P(S_L L)$	$P(L S_L)$
Løsning	2/3	5/6	5/8	1/6	1/2	3/4
%	66%	83%	63%	33%	50%	75%

Heldigvis samsvarer dette med løsningen som vi hentet ut fra figuren. Resultatet samsvarer også med den nevnte alternative løsning, der situasjonen beskrives som en Markovkjede.

I diskusjonsfora på nettet fins påstand om at denne løsningen er feil, da den ikke tar (tilstrekkelig) høyde for sekvenser av etterfølgende C-personer. Forslag til «riktig» løsning gis, som innebærer $P(S_O) = 3/4$. Løsningen lar seg representere i figuren ved å endre fargen på halvparten av hver av de to grønne feltene for type-C fra grønt til rødt. Argumentasjonen er imidlertid mystisk, og forutsetter en uendelig sekvens av C-individer.

La oss gå tilbake til spørsmålet om den rolle rekkefølgen av ankomster kan spille. Dette gjøres her ved å betrakte to diametralt motsatte ankomstsituasjoner:

1. Systematisk ankomst med seks mulige sykliske mønstre ABC, ACB, BCA, BAC, CAB, CBA. For å få med mellomperiodene med ledighet halve tiden, skytes inn L, slik at mønstrene er av typen ALBLCL, ALCLBL osv. med like stor sannsynlighet 1/6.
2. Tilfeldig ankomst, der hver ankomst har tre muligheter A, B eller C, med lik sannsynlighet og uavhengighet. For å få med mellomperiodene utvides utfallsrommet fra {A, B, C} til {A, B, C, L, L, L}, der hvert element har samme sannsynlighet 1/6.

Den første modellen gir oss et rent opptellingsproblem for hvert av de seks mønstre. Mønstrene er i to grupper $M_1=\{ABC, BCA, CAB\}$ og $M_2=\{ACB, CBA, BAC\}$. Mønstre fra M_1 gir opptattskilt (S_O) i alle tre typers besøkstid, mens mønstre fra M_2 gir feilaktig ledig (L) når C er inne. Vektet med 1/6 sannsynligheter gir de sannsynligheter vi fant med vår betingede analyse ovenfor. Merk at vi godt kan utvide modellen til å veksle mellom mønstre i samme gruppe, og også skyte inn de tre L-ene systematisk eller tilfeldig, uten at det gjør noe for resultatet.

I den andre modellen har vi gjort det mulig at flere av samme persontype kommer på rad, og at også omfanget av ledigperioder varierer over tid, men likevel i samsvar med de gitte opplysninger.

Denne modellen krever simulering, og denne har (noe uventet) også gitt resultat som er forenlig med våre sannsynlighetsberegninger.

Merknader. Begge modeller krever en startkonvensjon for tilfellet at første besøkende er en C-person. For den første modellen utvides syklusen et trinn bakover, slik at en av de to syklene ha en forutgående A, den andre en forutgående B. For den andre modellen kan en trekke lodd. For programmeringen er eneste utfordring at man etter hver forekomst av C og L, må lete tilbake og finne ut om den siste ikke-C /ikke-L var en A eller en B.

[Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 62 Løsning

Med n spurveunger og m mateturer kan situasjonen betraktes som m uavhengige gjentak av et multinomisk forsøk med n mulige utfall og like sannsynligheter $1/n$. Alternativt kan vi betrakte et utfallsrom der alle n^m mulige utfall er like sannsynlige. Implisitt har vi da en nummerering av både når og hvem det gjelder, selv om dette ikke inngår i problemstillingen. Fordelen er at vi kan bruke regelen om «gunstige på mulige».

Med $m=9$ mateturer har vi følgende tre ulike mønstre der alle har fått minst en porsjon:

222111 321111 411111

Hvert av disse mønstrene er representant for alle mønstre (utfall) med tilsvarende fordeling av porsjonene ungene mellom. Vi vil finne sannsynligheten for hvert av de tre mønstrene og summere disse. Vi må da telle opp antall utfall blant de n^m mulige utfall som gir det gitte mønster. Først avklarer vi hvor mange utfall som gir det samme mønster. For hvert av disse teller vi opp antall mulige måter å fordele m matporsjoner til de nå n nummererte spurveungene. I begge tilfeller er disse antallene multinomiske koeffisienter. Vi får

$$\begin{aligned} 2\ 2\ 2\ 1\ 1\ 1 &\rightarrow g = \frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{9!}{2!2!2!1!1!1!} \\ 3\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1 &\rightarrow g = \frac{6!}{1!1!4!} \cdot \frac{9!}{3!2!1!1!1!1!} \\ 4\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 &\rightarrow g = \frac{6!}{1!5!} \cdot \frac{9!}{4!1!1!1!1!1!} \end{aligned}$$

Forklaring av 222111: Vi skal velge ut tre posisjoner i rekkefølgen på seks som får to porsjoner, der de øvrige får en porsjon. Dette kan gjøres på $\frac{6!}{3!3!}$ måter. Så skal vi fordele de 9 porsjonene som angitt til de seks nå nummererte spurveungene. Det kan gjøres på $\frac{9!}{2!2!2!1!1!1!}$ måter. Multiplikasjon gir det søkte antall gunstige g . Sannsynlighetene er nå gitt ved $g/6^9 = 0.090$. Tilsvarende beregning for de to andre mønstrene. Resultatet blir

$$\begin{aligned} 2\ 2\ 2\ 1\ 1\ 1 &\rightarrow 0.090 \\ 3\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1 &\rightarrow 0.090 \\ 4\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 &\rightarrow 0.0090 \end{aligned}$$

Den søkte sannsynlighet er summen $0.0900+0.0900+0.0090=0.189$.

Her er en mer omfattende tabell med sannsynlighetene for ulike mønstre:

222111	222210	321111	322110	322200	331110	332100	333000
0.0900	0.0675	0.0900	0.2700	0.0450	0.0600	0.0900	0.0033
411111	421110	422100	431100	432000	441000	511110	521100
0.0090	0.0900	0.0675	0.0450	0.0150	0.0038	0.0090	0.0270

I tabellen summerer sannsynlighetene til 0.982, slik at 0.018 gjenstår til enda skjevete mønstre.

Tabellen muliggjør interessante sammenligninger. Eksempelvis er det mest sannsynlige mønstret 322110 tre ganger mer sannsynlig enn det mest rettferdige 222111.

Spørsmålet om hvor mange turer som trengs for å oppnå 95% sikkerhet for at alle får minst en porsjon krever en annen tilnærming. Vi vil her bruke den generelle addisjonssetningen for union av begivenheter til å vise at denne sannsynligheten er

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^m$$

La de n spurveungene være nummerert fra 1 til n og de m mateturene være nummerert fra 1 til m . Vi skal finne $P(A^c) = 1 - P(A)$, der

A = Minst en unge er uten mat

som kan skrives som union av begivenhetene

A_i = Unge nr. i er uten mat, for $i=1,2, \dots, n$.

Hadde disse begivenhetene vært disjunkte ville vi ha $P(A)$ som summen av de tilhørende n individuelle sannsynlighetene. Kall denne summen S_1 . En første korreksjon vil være å trekke fra summen S_2 av sannsynlighetene for snittet av alle ulike par av slike begivenheter. Da har vi trukket fra for mye, og slik fortsetter vi å legge til summen av sannsynlighetene for alle tripler S_3 og så videre helt til vi kommer til sannsynligheten S_n for snittet av alle n begivenhetene. Vi har da

$$P(A) = S_1 - S_2 + S_3 - \dots \pm S_n$$

Her blir

$$S_k = \binom{n}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^m \text{ for } k=1,2,\dots,n$$

Forklaring: I summen S_k er det $\binom{n}{k}$ ledd, ett for hver mulig kombinasjon av k utvalgte unger uten mat. Aktuelle mottakere av mat er da de $n-k$ øvrige spurveunger, og med m mateturer er det $(n-k)^m$ mulige mønstre for disse. Antakelsen om like sannsynlige mønstre gir da med regelen «gunstige på mulige» sannsynlighet lik $(n-k)^m/n^m$. Dette gir $P(A^c) = 1 - P(A)$ som angitt, med sum som tar med seg også $k=0$.

Numerisk beregning gir følgende sannsynligheter

m	6	9	12	18	24	27
$P(A^c)$	0.015	0.189	0.438	0.785	0.925	0.957

For $m=9$ gjenfinner vi sannsynligheten 0.189. Vi ser at det trengs hele $m=27$, dvs. tre ganger så mange, for å oppnå 95% sjanse.

Merknader. Problemstillingen er et eksempel på det såkalte «Occupancy problem». Det er beslektet med det såkalte «Coupon collector problem», der det med et varekjøp følger et samleobjekt i en serie av n slike objekter, og en samler ønske å skaffe seg en full serie. Begge problemer blir ofte presentert ved kuler tilfeldig lagt opp i n bokser, men problemene har ulik fokus. Henholdsvis: Sjansen for minst en kule i hver boks for gitt antall kuler m , og forventet antall kuler som skal til for at det er minst en kule i hver boks. Teoretisk sett kan det ligge ulike utfallsrom til grunn, endelig for gitt m og uendelig for tilfeldig m . Dualitet. sikrer at kombinatorisk argumenter kan gå på tvers, uten å gå dypere inn på utfallsrommet.

[Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 63 Løsning

En løsningsmulighet er å betinger mhp første nedfall med fire muligheter: Første nedfall i sone nr. i for $i=0,1,2,3$, der 0 svarer til intet nedfall. For forventet antall soneforsøk inntil topper er nådd F gjelder da

$$F = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + (1 + F) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + (2 + F) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (3 + F) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Løser vi ut F får vi $F = 14$.

Dette resonnementet går like enkelt for vilkårlig antall soner vilkårlig opp-sannsynlighet p med tilhørende nedfall-sannsynlighet $q=1-p$. Vi får da

$$F_n = n \cdot p^n + \sum_{k=1}^n (k + F_n) \cdot p^{k-1} q$$

Løser vi ut F_n får vi

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{np^n + \sum_{k=1}^n k \cdot p^{k-1} q}{p^n} \\ &= n + p^{-n} \sum_{k=1}^n k \cdot p^{k-1} q \\ &= q^{-1}(p^{-n} - 1) \end{aligned}$$

Formlene kan gis fortolkninger: Brøken er forventet antall soner til første «nevneverdige hendelse», dvs. når toppen eller faller ned, dividert med sannsynligheten for å nå toppen uten nedfall. I det neste uttrykket er det additive ledd tillegget i forventning som skyldes risikoen for å miste taket. For $p=q=1/2$ gir dette $F_n = 2(2^n - 1)$ og følgende forventninger:

n	1	2	3	4	5
F_n	2	6	14	30	62

Vi noterer også den lineære rekursjonen $F_{n+1} = p^{-1}(F_n + 1)$, et resultat som kan argumenteres for direkte. For $p = q = \frac{1}{2}$ er rekursjonen $F_{n+1} = 2(F_n + 1)$.

En annen mer tungvint beregningsmåte vil være å beskrive problemstillingen med tre soner som en Markovkjede med fire tilstander 0,1,2, 3, der de tre første er transiente og den siste absorberende. Med utgangspunkt i overgangsmatrisen beregnes den såkalte fundamentalmatrisen. Forventet antall besøk i transiente tilstander før absorpsjon (nådd toppen) er da gitt ved kjent formel.

Noen har kanskje avslørt at problemstillingen er det samme som ved rettfærdige myntkast å spørre etter forventet ventetid til mønsteret KKK (tre kron på rad) inntreffer. I vår kontekst svarer kron (K) til at man fullfører en sone og mynt (M) til at taket glipper og man detter ned. Problemstillingen med mønstre i myntkast presenteres ofte med tilhørende løsning, der man isteden betinger mhp. $de(n)$ siste hendelse(r) som følger:

La G_k være forventet antall kast inntil KKK inntreffer, gitt at de k foregående kast var kron K, definert for $k=0,1,2,3$, der $k=0$ svarer til at foregående kast var mynt. Vi er interessert i G_0 og har følgende ligninger

$$\begin{aligned} G_0 &= \frac{1}{2}(1 + G_0) + \frac{1}{2}(1 + G_1) \\ G_1 &= \frac{1}{2}(1 + G_0) + \frac{1}{2}(1 + G_2) \\ G_2 &= \frac{1}{2}(1 + G_0) + \frac{1}{2}(1 + G_3) \end{aligned}$$

Ved eliminasjon: Av den første ligningen følger at $G_1 = G_0 - 2$, som innsatt i den andre gir $G_2 = G_0 - 6$, som innsettes i den tredje gir $G_3 = G_0 - 14$. Siden nødvendigvis $G_3 = 0$ må derfor $G_0 = 14$.

En generalisering til lengre K-mønstre krever flere ligninger, og blir tilsynelatende mer komplisert.

Gitt ligningenes struktur og eliminasjonsmåte er det lett å se at løsningen har formen

$G_k = G_0 - a_k$, der $a_k = 2(a_{k-1} + 1)$. Med $a_0 = 0$ får vi følgen 2, 6, 14, 30 osv. Det betyr eksempelvis at forventet ventetid til KKKK er $G_0 = a_4 = 30$, fordi da er nødvendigvis $G_4 = 0$. For tilfellet at vi har en skjev mynt med kronsannsynlighet p , er det bare å erstatte 2-tallet i oppdateringsformelen med $1/p$.

Vår første og foretrukne løsning med betinging mhp. første hendelse av et gitt slag er nærmere til tankegangen i fornyelsesteori, som ikke overraskende viser sin styrke.

[Innholdsliste](#)