Sannsynlighet og risiko: i forskning, dagligliv og spill

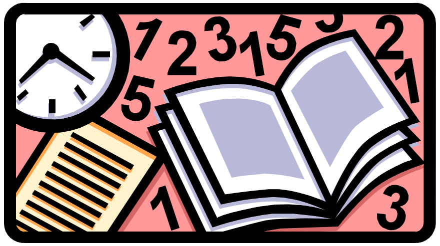
Jostein Lillestøl
Norges Handelshøyskole

Forelesning Senioruniversitet Bergen høsten 2007

Mitt fagfelt:

Sannsynlighetsteori: Hvordan beskrive i matematiske termer fenomener som har med usikkerhet og risiko å gjøre, og kunne regne matematisk på dette

Statistisk teori: Hvordan trekke konklusjoner om "virkeligheten" basert på data, med tilhørende usikkerhetsvurdering



Matematisk Statistikk

Karakteristikker

Kjedelig?	Nei!
Nyttig?	Ja!
Vanskelig?	Tja!

Anvendelsesområder

Naturfag:

Astronomi, biologi, fysikk, geologi, kjemi, meteorologi etc

Samfunnsfag:

Økonomi, sosiologi, geografi

Individfag:

Psykologi, kriminologi, demografi, aktuar

Teknologi, Medisin, Språk

Tema for i dag

- Grunnlegende begreper
- Eksempler for å illustrere disse
- Noen tilsynelatende paradokser
- Noen anvendeser

Begreper i sannsynlighetsregning

I fokus:

Et fenomen eller problem som innebærer en iakttakelse med usikkert utfall

Utfallsrom = Mengden av alle mulige utfall

der de enkelte utfall er gjensidig utelukkende

Begivenhet = En mengde av utfall (av interesse)

angitt ved de ”gunstige” utfall for begivenheten

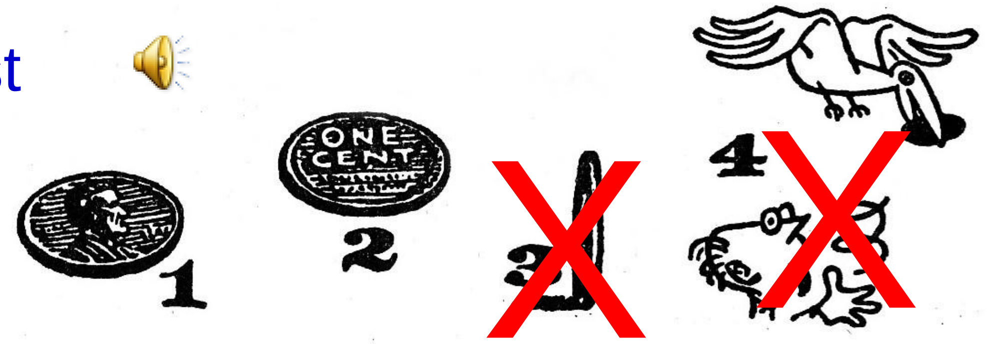
Vi ønsker å bestemme sannsynligheter for utfall og begivenheter

Utfallsrom og begivenheter

Utfallsrommet velges hensiktsmessig ut fra det fenomen vi er interessert i å studere, men enklest mulig.

Eksempel: Et myntkast

Mulige utfall?



Vi trenger en egnet symbolbruk!

Eksemplet: Utfallsrom U={K,M}
der K=”kron” og M=”mynt”

Utfallsrom og begivenheter

Utfallsrom ("Univers") : U

Begivenheter: A

B

$\overline{A}$ $\qquad$ $"ikke-A"$

$\overline{B}$ $\qquad$ $"ikke-B"$

$A \cup B$ $\qquad$ $"A\ eller\ B"$

$A \cap B$ $\qquad$ $"A\ og\ B"$

Utfallsrom og begivenheter

Eksempel: To myntkast

Utfallsrom $$U = \{KK, KM, MK, KK\}$$

A=Begge kron $$A = \{KK\}$$

B=Minst en mynt $$B = \{KM, MK, MM\}$$

C=Første kast kron $$C = \{KK, KM\}$$

D= Annet kast kron $$D = \{KK, MK\}$$

$$\overline{A} = B, \quad A \cup B = U, \quad A \cap B = \emptyset$$

$$OPPGAVE: \quad C \cup D = ? \quad C \cap D = ?$$

Sannsynligheter

Aksiomer:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ for alle A
2. $P(U) = 1$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dersom $A \cap B = \emptyset$

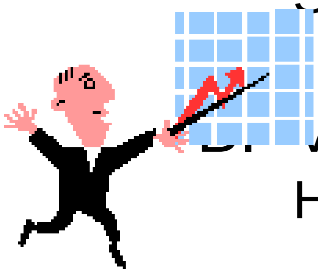
Av disse kan utledes:

4. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Hvordan bestemme sannsynligheter?

A. Ved enkle symmetribetraktninger

Spill: Mynt, terning, Lotto osv.



B. Ved statistiske observasjoner

Historiske data, eksperimenter etc.

C. Subjektiv vurdering

Personlig sannsynlighet, konsensus ekspertvurdering

Antakelser om uavhengighet benyttes også ofte

Like sannsynlige utfall:

Regelen om ”gunstige på mulige”

Dersom alle utfall i utfallsrommet er like sannsynlige er sannsynligheten for enhver begivenhet A gitt ved

$$P(A) = \frac{g}{m}$$

der g er antall gunstige utfall for A og
m er antall mulige utfall i utfallsrommet

Dette er den klassiske definisjon på sannsynlighet,
fra 1700-tallet, tilstrekkelig for å analysere enkle spill
Utfordringen er å kunne telle opp antall muligheter -> Kombinatorikk

Spill

1. Lotteriske
   - Lotto, Flax, Extra, Rullett
2. Kunnskap + Hell
   - Poker, Bridge, Fotballtipping, Børs?
3. Strategiske
   - Sjakk, Auksjoner?

Eksempler

Lotto: Syv rette med enkeltrekke:

1 : 5 370 616 = 0.00000019

Bridge: Hånd med fire honnører

171 340 769 600 : 635 013 559 600 = 0.26982222

Poker: Flush

5148 : 2 598 560 = 0.00198079

Sannsynligheter: To myntkast

$$U = \{KK, KM, MK, MM\}$$

Antar at alle fire utfall er like sannsynlige

$$A = \{KK\} \qquad P(A) = 1/4$$

$$B = \{KM, MK, MM\} \qquad P(B) = 3/4$$

$$C = \{KK, KM\} \qquad P(C) = 2/4 = 1/2$$

$$D = \{KK, MK\} \qquad P(D) = 2/4 = 1/2$$

Fødselsdagsproblemet

I en gruppe på n personer – Hva er sannsynligheten P(n)

for to eller flere personer med bursdag samme dag?

Hvor stor forsamling trengs for at sannsynligheten blir mer enn 50%?

n	10	20	22	23	30	40	60
P(n)	0.117	0.411	0.476	0.507	0.706	0.891	0.994

Forutsatt: Alle 365^n kobinasjoner like sannsynlige. Rimelig?

Simulering

Uavhengighet

Begivenhetene A og B er uavhengige dersom

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

<u>Eksemplet:</u>

A=Begge kron

B=Minst en mynt

C=Første kast kron

D= Annet kast kron

E=Ulikt resultat

A og B er ikke uavhengige

A og C er ikke uavhengige

C og D er uavhengige

<u>Oppgave:</u>

Er C og E uavhengige?

Binomisk ”forsøk”

Gjentatte ”forsøk” med to mulige utfall: Suksess (S) og Fiasko (F)

Sannsynligheten for S den samme i alle forsøk

Utfallene av forsøkene er uavhengig av hverandre

Sannsynligheten for x suksesser i løpet av n forsøk er da gitt ved

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Eksempler:

n myntkast, n produserte enheter, n skadeforsikrede, n livsløp

Binomiske sannsynligheter

X=antall kron i 10 myntkast ~ Bin(*n=10,p=0.5*)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p(x)	0.0010	0.0098	0.0439	0.1172	0.2051	0.2461	0.2051	0.1172	0.0439	0.0098	0.0010

X=antall utbetalinger blant 1000 forsikrede

~ Bin(*n=1000,p=0.005*)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	>9
p(x)	0.0067	0.0337	0.0842	0.1404	0.1755	0.1755	0.1462	0.1044	0.0653	0.0363	0.0317

I begge eksempler er forventet antall EX=np=5

”Usannsynlige” hendelser

Vi opplever ofte opp sammenfall av hendelser som tilsynelatende er usannsynlige, eksempelvis:

- Samme person vinner milliongevinst flere ganger
- Mange misdannelser ved fødsler innen en gruppe
- Mange dødsfall på en sykehusavdeling eller vakt

Dette får ofte sterk mediefokus, og beregning av sannsynligheten for at dette skulle skje akkurat denne person, denne gruppe eller denne avdeling gir en mikroskopisk sannsynlighet, som i noen tilfeller sår mistanke om at noe galt har skjedd.

Slik beregning i ettertid kan føre galt av sted!

”Usannsynlige” hendelser

Slik beregning i ettertid kan føre galt av sted!

Sannsynligheten for at det ”usannsynlige” vil skje for en eller annen, en eller annen gruppe eller et eller annet sted innenfor en rimelig tidsperiode kan vise seg å være ganske stor og frita for mistanke.

Tilsyn basert på systematisk observasjon er viktig,
Eksempel: Medisinsk fødselsregister
Kalkulert risiko for falske alarmer

”Usannsynlige” hendelser som kommer i fokus på annen måte er vanskelig å håndtere for tilsynsmyndighet

Hvor sannsynlig er det at en eller annen vinner toppgevinsten i Lotto mer enn en gang?

Betrakt spiller som hver uke leverer en kupong med 10 kryss som tilsvarer 120 enkeltrekker (og koster 480 kroner)

Sannsynligheten for en toppgevinst en gitt uke 0.00002231

Sannsynligheten for minst en toppgevinst i løpet av 10 år 0.01153246

Sannsynligheten for minst to toppgevinster i løpet av 10 år 0.00006663

Anta så en gruppe med n spillere av samme type

Sannsynligheten for at minst en spiller vinner minst to toppgevinster i løpet av 10 år

n	100	1000	10 000	100 000
p(n)	0.6%	6.4%	48.6%	99.9%

Dette kan da ikke være uavhengighet?

Når noe observeres over tid fester mange seg ved mønstre som de oppfatter som ikke-tilfeldige,

Eksempler: Lottotallene, månedlige ulykkestall

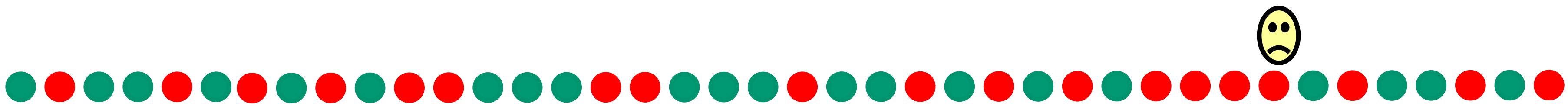
Dette kommenteres ofte i media, tilsynelatende uten forståelse av den rolle tilfeldigheter spiller.

Hva er tilfeldig?

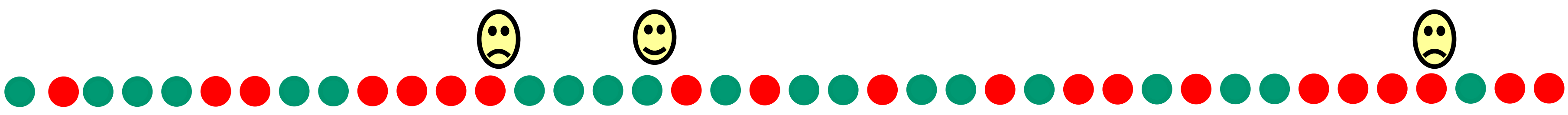
Er dette tilfeldig?

Hvilken prosess er tilfeldig?

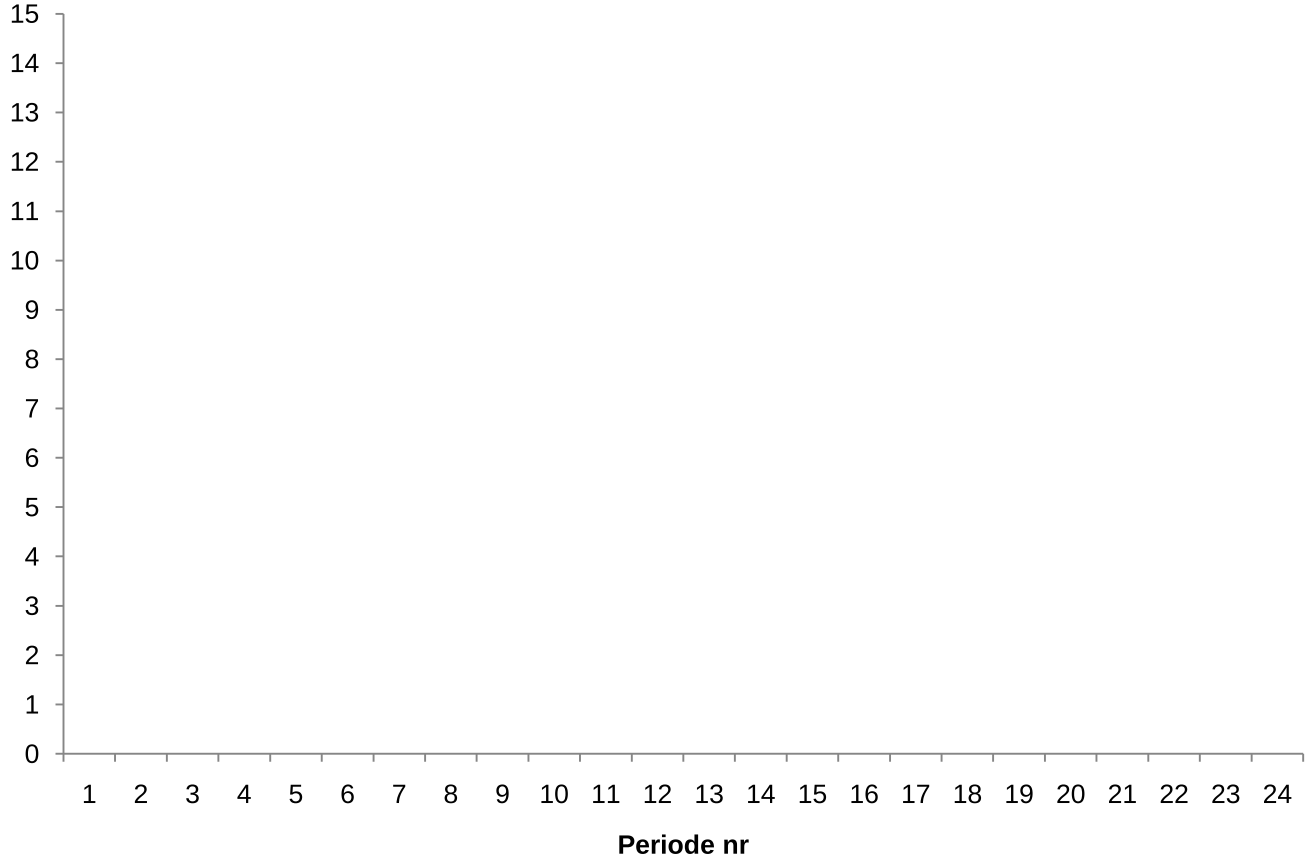
Denne?



Eller denne?



Antall uhell i etterfølgende perioder: systematisk forbedring eller tilfeldig?



Betinget sannsynlighet

Den betingede sannsynlighet for A gitt B er bestemt ved

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Eksempel: To myntkast

A = begge kron   B = minst en kron

$$P(A|B) = \frac{1/4}{3/4} = \frac{2}{3}$$

Sannsynlighetstankekors 1:

En tobarnsfamilie har flyttet inn i nabohuset,

Du får vite at et av barna er en gutt?

Hva er sannsynligheten for at begge er gutter?

1/3 ?

1/2 ?

3/4 ?

To scenarier:

1. Han vi sendte over for å sjekke holder tilbake informasjon
2. Vi ser en gutt stikke nesen opp over vinduskarmen

Gjør det noen forskjell?

Utfallsrom 1: {GG, GP, PG, PP}
Sannsynlighet: ¼ ¼ ¼ ¼

$$P(A|B) = \frac{1/4}{3/4} = 1/3$$

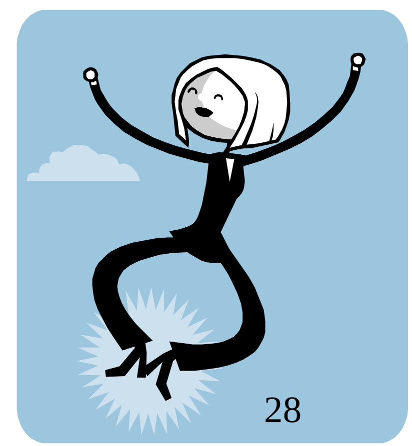
Utfallsrom 2: {GGg, GPg, PGg, GPp, PGp, PPp}
Sannsynlighet: 1/4 1/8 1/8 1/8 1/8 1/4

$$P(A|B) = \frac{1/4}{1/2} = 1/2$$

Monty Hall's dilemma

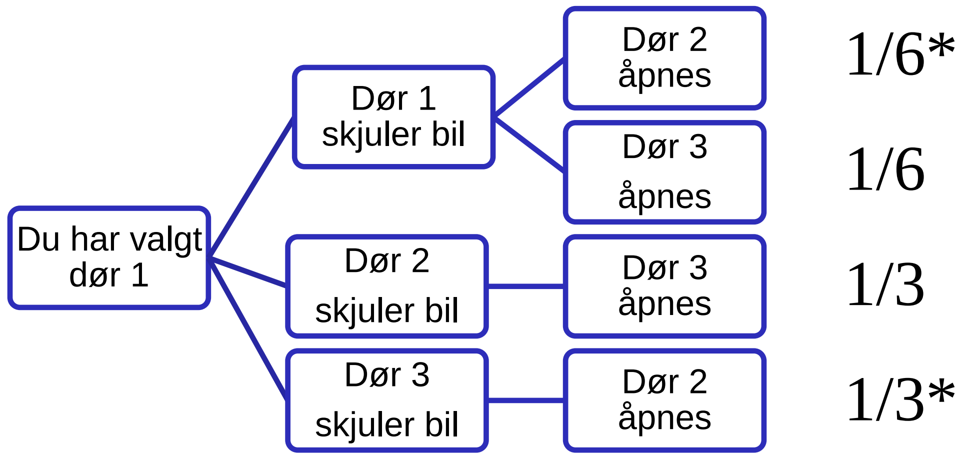
Du deltar i et TV-show der du kan velge mellom en av tre dører. Bak en skjuler det seg en ny bil, bak de to andre en sykkel. Etter at du har gjort ditt valg, åpner programleder en av de andre dørene som skjuler en sykkel, og tilbyr deg å bytte dør.

Hva vil du gjøre?



Monty Hall's dilemma

Anta at du har valgt dør nr. 1 (nummerering spiller ingen rolle)



A_i = Dør nr. i skjuler bil (i=1,2,3) B_j =TV-vert åpner dør nr. j (j=2,3)
Den relevante sannsynlighet er $P(A_3|B_2)$ evt. $P(A_2|B_3)$

$$P(A_3 \mid B_2) = \frac{P(A_3 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{1/3}{1/6 + 1/3} = \frac{2}{3}$$

Obligatorisk testing?

En test for en alvorlig sykdom gir korrekt svar for 90% av de som har sykdommen. Bør man innføre obligatorisk testing?

Anta at testen gir falsk indikasjon for 20% av de som ikke har sykdommen, og at 5% av befolkningen har sykdommen.
La A = har sykdommen og B= testen indikerer sykdommen. Da har vi:

$$P(A) = 0.05 \quad P(B \mid A) = 0.90$$
$$P(\bar{A}) = 0.95 \quad P(B \mid \bar{A}) = 0.20$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(B)}$$

$$P(A \mid B) = \frac{0.05 \cdot 0.90}{0.05 \cdot 0.90 + 0.95 \cdot 0.20} = 0.19$$

Mao. 81% av de indikerte har ikke sykdommen

Simpsons paradoks

Eksempel: Behandling av nyrestein.

Tabellen til høyre indikerer at ny behandling har dårligere effekt enn vanlig behandling for alle pasienter samlet sett.

Friskrater (samlet sett)	
Ny behandling	Vanlig behandling
78% (273/350)	83% (289/350)

Tabellen under indikerer imidlertid at deler man opp resultatene i liten og stor nyrestein så er ny behandling bedre i begge grupper!

Friskrater for hvor steinstørrelse			
Liten stein		Stor stein	
Ny behandling	Vanlig behandling	Ny behandling	Vanlig behandling
93% (81/87)	87% (234/270)	73% (192/263)	69% (55/80)

Simpsons paradoks formalisert

Vi kan ha $$P(A \mid B) < P(A \mid \overline{B})$$

selv om både

$$P(A \mid B \cap \overline{C}) > P(A \mid \overline{B} \cap \overline{C})$$

$$P(A \mid B \cap C) > P(A \mid \overline{B} \cap C)$$

I eksemplet svarer dette til

Her er *A* = frisk, *B* = ny behandling og *C* = liten stein.

Simpsons paradoks

Andre eksempler:

Større andel personer dør av kreft, men andel kreftdødsfall går ned i alle aldersgrupper:

TABLE 1
Probability of dying from cancer. Number of women (among 100,000 in the respective age groups) who died from cancer in Germany

Age	1970	2001
0–4	7	3
5–9	6	2
10–14	4	2
15–19	6	2
20–24	8	4
25–29	12	6
30–34	21	13
35–39	45	25
40–44	84	51
45–49	144	98
50–54	214	161
55–59	305	240
60–64	415	321
65–69	601	468
70–74	850	656
75–79	1183	924
80–84	1644	1587

Source: Statistisches Jahrbuch für die Bundesrepublik Deutschland.

UC Berkeley ble i 1975 saksøkt for å drive kjønnsdiskriminering ved opptak av nye studenter.
Bakgrunn: Andelen som ble tatt opp av de kvinnelige søkerne var klart lavere enn andelen av de mannlige søkere. Men, når man så på data for hvert enkelt institutt viste det seg at ingen institutt favoriserte menn – de fleste favoriserte kvinner…
(men mange flere kvinner enn menn søkte de studiene som var vanskeligst å kommer inn på…)

Skatteprosenten redusert i alle inntektsgrupper, men totalprosenten økte:

Table 2. Total Income and Total Tax (in thousands of dollars), and Tax Rate for Taxable Income Tax Returns, by Income Category and Year

Adjusted Gross Income	1974 Income	1974 Tax	1974 Tax Rate	1978 Income	1978 Tax	1978 Tax Rate
under $ 5,000	41,651,643	2,244,467	.054	19,879,622	689,318	.035
$ 5,000 to $ 9,999	146,400,740	13,646,348	.093	122,853,315	8,819,461	.072
$ 10,000 to $14,999	192,688,922	21,449,597	.111	171,858,024	17,155,758	.100
$ 15,000 to $99,999	470,010,790	75,038,230	.160	865,037,814	137,860,951	.159
$ 100,000 or more	29,427,152	11,311,672	.384	62,806,159	24,051,698	.383
Total	880,179,247	123,690,314		1,242,434,934	188,577,186	
Overall Tax Rate			.141			.152

 47

Hva er risiko?

- en kombinasjon av utfall og konsekvens

Ulike risikotyper: Prosjektrisiko, økonomisk risiko, ulykkesrisiko,…

Ulike interessenter: Individ, gruppe, bedrift, samfunn

- Risikoanalyse - ”Risk Analysis”
- Risikostyring - ”Risk Management”

Ingeniører og økonomer bruker ofte begrepet ulikt.

Utfordringer: Hva er akseptabel risiko?
Ikke alt kan måles!
Objektiv og subjektiv risiko kan sprike!

Noen problemstillinger:

<u>Personlig:</u>

-Hva må til for høy forventet gevinst med liten risiko for (store) tap?

-Hva er risikoen ved denne aktiviteten?

- Hva slags forsikringer trenger jeg?

<u>Bank og forsikring:</u>

Hva trengs for å dekke over (ekstreme) tap?

<u>Ingeniør:</u>

Hvilke risikofaktorer fins, og hvordan kan de fjernes eller reduseres?

Er dette prosjektet akseptabelt ut fra lokale og/eller globale miljøkrav?

<u>Medisin:</u>

Hvilken behandling er best?

- stor sannsynlighet for overlevelse med små bivirkninger

Hvilken medisinsk behandling er best?”

Dette besvares sikrest med *Kontrollerte eksperimenter*

I praksis er dette ofte ikke mulig, og en må ty til *Observasjonsstudier.* Slike må planlegges med omhu for å redusere risikoen for feilslutninger. Utfordringer er bl.a.

- å kunne skille årsak – virkning
- å kunne skille ut effekten av ”konkurrerende risiki”

Dilemma: Kan ikke gi alle den behandling man til enhver tid tror er best. Må variere for å lære, ellers kan den beste forbli uoppdaget.

”Life-Event studies”: En suksesshistorie

Problemstilling:

Hvilken behandling av pasient gir lengst forventet levetid?

Vanskeligheter:

- pasienter kommer inn i studien ved ulik alder (”venstresensuring”)
- pasienter kommer inn i studien med ulik helse (kovariater)
- Studien må avsluttes før alle er døde (”høyresensurering”)

Ny matematisk statistisk teori fra midten av 1970-tallet gjorde det mulig å analysere denne typen data.

Sentrale bidrag til teorien er gitt av norske forskere (Odd Aalen)

Betydelig anvendt miljø på feltet i Oslo og Bergen

Absolutte versus relative tall

Aftenbladet.no 07.04.2007

Farligere å kjøre bil enn å hoppe i fallskjerm

- I Norge skjer det statistisk en dødsulykke pr. 70.000 fallskjermhopp. Såvidt jeg kan forstå, er det mye farligere å kjøre bil, men dødsulykker i trafikken godtar vi uten å slutte å kjøre, sier hovedinstruktøren i Stavanger fallskjermklubb.

Aftenbladet.no 08.04.2007

Fallskjermhopping mye farligere enn bilkjøring

- Professor Terje Aven ved UiS mener fallskjermhopping er ti ganger farligere enn bilkjøring.
- Beregninger han har gjort, viser at det er 1 promilles (0,1 prosent) sannsynlighet for å omkomme under fallskjermhopping i løpet av et år. For bilkjøring er det tilsvarende tallet 0,1 promille. Det vil si ti ganger flere omkomne under fallskjermhopping enn ved bilkjøring,.

Aven legger til grunn følgende forutsetninger for sine beregninger:

BILKJØRING: Ifølge tall fra TØI viser de historiske tallene cirka 20 omkomne per 100 millioner timer i bil. Per time er da sjansen for å omkomme 20 delt på 100 millioner. Dersom vi bruker 500 timer i bil hvert år, blir sannsynligheten 500 ganger så høy, det vil si **1/10.000**.
FALLSKJERMHOPPING: Aven forutsetter én dødsulykke per 70.000 hopp. Hvis hver fallskjermhopper hopper 70 hopp i året, blir brøken 70/70.000 eller **1/1000**.

Betydningen av å ha representative data

"Skal vi stenge grensene for flyktninger fra fjerne land?"	***Ja***	***Nei***
Holmgang	89%	11%
Opinion A/S (representative tall)	17%	83%

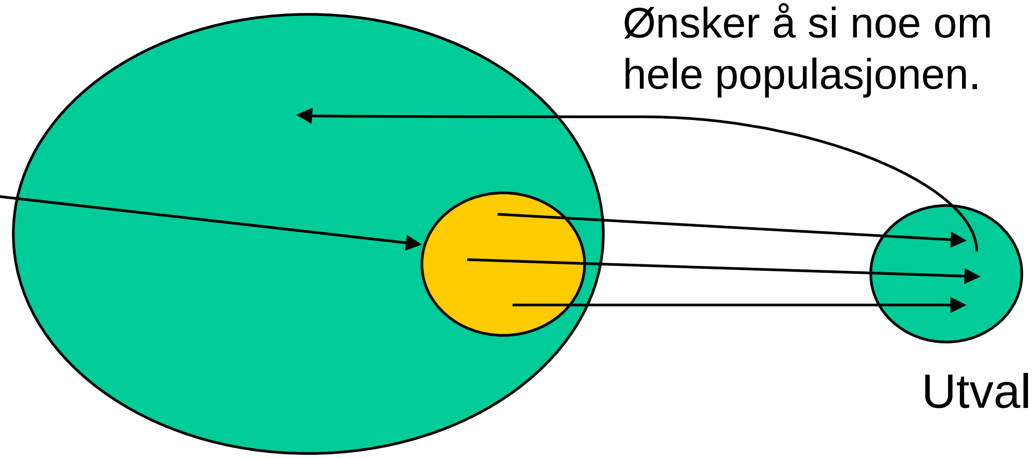
"Reagerer du negativt på svart arbeid?"	***Ja***	***Nei***
Holmgang	30%	70%
Opinion A/S (representative tall)	62%	38%

Vanlig problem:

Ønsker å si noe om hele populasjonen.

Har bare data fra en delmengde av populasjonen.

(Eller elementer fra ulike delmenengder av populasjonen har ulik sannsynlighet for å bli valgt ut.)



Utvalg

Populasjon


GODE RESULTATER, KARER! IFØLGE SPØRRE-
UNDERSØKELSEN ER DET BARE ÉN AV TI
ANSATTE I TESTGRUPPA SOM OPPLEVER
OSS SOM EN MANNSDOMINERT BEDRIFT!