Forkurs i matematikk

Per Manne

Høsten 2023

Opplegg høsten 2023

Tidsrom

Mandag 7. august – fredag 11. august

Foreleser

Førsteamanuensis Per Manne, Institutt for foretaksøkonomi
Rom C415 (4. etasje i høyblokken), e-post per.manne@nhh.no

Studentassistenter

Olav Gilje, Hedda Lauritzsen og Harald Straume

Timeplan (samme hver dag)

Forelesning	Aud Max	kl. 10:15 – 12:00
Oppgaveregning		kl. 13:15 – 15:00
Regnetime/orakel		kl. 15:15 – 16:00

Pensum

er dekket av dette kompendiet. Innholdet fins også i læreboken i MET1:

Dovland og Pettersen: *Matematikk for økonomistudenter* (3. utgave), Fagbokforlaget, 2019.

Tidligere utgaver av læreboken kan også brukes i MET1.

Emner

	Dovland og Pettersen
Grunnleggende algebra	
Eksponentregler	1.4, 1.6
Parenteser og fortegnsregler	1.1, 1.4
Faktorisering	1.4
Ligninger	1.5
Ulikheter	1.6
Funksjonsdrøfting	
Koordinatsystemer	2.1, 2.7
Funksjonsbegrepet	2.1–5
Rette linjer	2.2

Derivasjon og tangentlinjer	3.2
Voksende/avtakende funksjoner	3.5
Maksimums- og minimumspunkter	5.5
Derivasjonsregler	3.3, 3.4, 5.1
Eksponentialfunksjoner	2.5, 4.5
Logaritmer	4.2, 4.5

Innholdsfortegnelse

Oppgaver mandag 7. august

(Regnes første time, gjennomgås andre time.)

Oppgave 1

Anne setter inn 25 000 kr i banken til 2,5 % årlig rente.

a) Hvor mye har beløpet vokst til etter 5 år?
b) Hvor lenge må Anne vente før beløpet har vokst til 30 000 kr?
c) Hvor stor skulle renten ha vært for at beløpet skulle ha vokst til 30 000 kr på 5 år?

Oppgave 2

Hvis beløpet A står i banken i n år til årlig rente r, så vokser det til beløpet B, der vi har

$$B = A(1+r)^n$$

a) Løs denne ligningen med hensyn på A.
b) Løs ligningen med hensyn på r.
c) Løs ligningen med hensyn på n.

Forklar i hvert tilfelle med ord hva løsningen beskriver.

Oppgave 3

Ordne tallene i stigende rekkefølge

(a) $0{,}03 \cdot 10^3, \quad 54 \cdot 10^0, \quad -9{,}6 \cdot 10^5, \quad 12345 \cdot 10^{-3}, \quad 2{,}1 \cdot 10^1, \quad -610 \cdot 10^{-1}$
(b) $(a^2)^3, \quad a^{2+3}, \quad a^{2^3}, \quad (a^3)^2, \quad a^{3^2}$ når $a > 1$
(c) $(a^2)^3, \quad a^{2+3}, \quad a^{2^3}, \quad (a^3)^2, \quad a^{3^2}$ når $0 < a < 1$

Oppgave 4

Skriv så enkelt som mulig (uten bruk av kalkulator i (c))

(a) $\frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}}{a}$
(b) $\frac{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a^3}}{a^2} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}$
(c) $\sqrt{75} - \sqrt{12} - \sqrt{27}$

Oppgave 5

Til diskusjon: Hva er nyansene mellom ordene *ligning, formel* og *uttrykk* (brukt i matematisk forstand). Gi eksempler.

Oppgaver til tirsdag 8. august

Oppgave 6
Trekk sammen uttrykket

$$\frac{18b^2}{a^2 - 9b^2} - \frac{a}{a + 3b} + 2$$

Merk: Den første nevneren $a^2 - 9b^2$ kan faktoriseres ved bruk av 3. kvadratsetning. Den andre nevneren $a + 3b$ blir en av faktorene.

Oppgave 7
Skriv så enkelt som mulig

(a) $3a - \frac{4a-2}{3} + \frac{2a-4}{6}$
(b) $2(a+2)^2 - (a-2)^2 - (a+2)(a-2)$
(c) $\left(\frac{3}{2x+4}\right) : \left(\frac{3x-9}{2x^2-8}\right)$

Oppgave 8
Trekk sammen

(a) $\frac{3a^2b^4c^3}{12a^4bc^3}$
(b) $\frac{a^2x^2 - ax}{ax}$
(c) $\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b}$

Oppgave 9
Løs følgende ligning og ulikheter

a) $\frac{x+1}{x+2} = \frac{6}{8}$
b) $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} > 0$
c) $(1-x)^3 - 3x(1-x)^2 > 0$

Merk: I punkt (c) bør du se etter en felles faktor som du kan sette utenfor en parentes.

Oppgave 10
Et rektangel har areal 80 cm^2 og omkrets $37{,}8 \text{ cm}$. Finn sidene i rektangelet.

Oppgave 11
Kostnaden $K(x)$ ved å produsere x enheter av en vare er ukjent. Vi vet at $K(100) = 1500$, $K(200) = 2200$ og $K(300) = 2700$. Anta at $K(x)$ er et andregradspolynom

$$K(x) = ax^2 + bx + c$$

Bestem koeffisientene a, b, c ut fra opplysningene ovenfor. På hvor stort intervall ville du ha brukt denne funksjonen for å beskrive kostnaden?

Oppgaver til onsdag 9. august

Oppgave 12

Løs ligningene og ulikhetene ved regning.

(a) $4x^2 - 21x + 5 = 0$
(b) $\frac{-4x^2+21x-5}{x+2} \geq 0$
(c) $\frac{3}{2}x > 1 + 2\left(x - \frac{1}{3}\right)$
(d) $\frac{3x-1}{x+1} + \frac{2x}{x-1} > 5$

Oppgave 13

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = x^3 - 3x - 2$$

Vis at $f(x)$ er delelig med $x + 1$, og utfør divisjonen. Skriv $f(x)$ som et produkt av bare førstegradsfaktorer, og løs ligningen $f(x) = 0$.

Oppgave 14

La $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$. Bruk grafen til å finne nullpunktene. Faktoriser $f(x)$.

Oppgave 15

Bestem avstanden mellom følgende par av punkter.

(a) $(1, 3)$ og $(2, 4)$
(b) $(-1, 2)$ og $(-3, -3)$
(c) (a, b) og $(-a, b)$
(d) (x, y) og $(2x, y + 3)$

Oppgave 16

(a) Finn ligningen for en sirkel med sentrum i punktet $(2, 3)$ og radius 4.
(b) Finn ligningen for en sirkel med sentrum i $(2, 5)$ og som passerer gjennom punktet $(-1, 3)$.

Oppgave 17

Finn største mulige definisjonsmengde til hver av følgende funksjoner.

(a) $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$
(b) $g(x) = \frac{1}{x^2}$
(c) $h(x) = \big((x + 1)(x - 1)\big)^{1/2}$

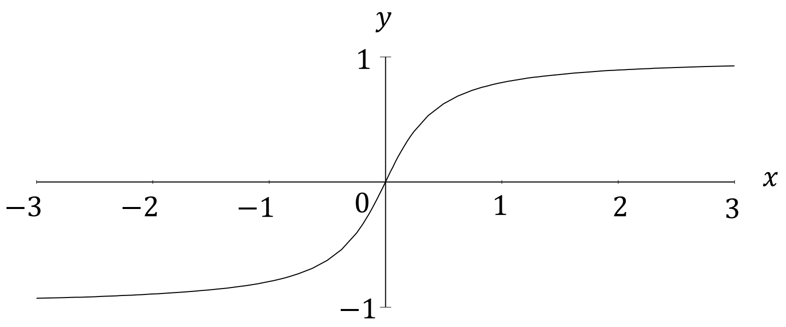
Oppgave 18

(a) La $f(x) = 100x^2$. Vis at $f(tx) = t^2 f(x)$ for alle t.
(b) La $g(x) = \sqrt{2x}$. Vis at $g(tx) = \sqrt{t}\,g(x)$ for alle $t \geq 0$.

Oppgaver til torsdag 10. august

Oppgave 19

Figuren nedenfor angir grafen til en funksjon $f(x)$. (Det er horisontale asymptoter for $y = 1$ og for $y = -1$.) Tegn grafen til den deriverte funksjonen $f'(x)$.



Oppgave 20

Deriver funksjonene gitt ved

(a) $f(x) = 4x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 3$
(b) $g(x) = 2x^2 - \frac{5}{x}$
(c) $h(x) = 3x^2(x^2 + 8)$
(d) $k(x) = (x^2 - 2x)(1 + x^2)$

Oppgave 21

Kostnaden $K(x)$ ved å produsere x enheter av en vare er et andregradspolynom

$$K(x) = px^2 + qx + r$$

Vi kjenner funksjonsverdiene $K(500) = 32\,500$, $K(1000) = 60\,000$ og $K(2000) = 130\,000$. Bestem koeffisientene p, q, r ut fra dette

Varen kan selges for 70 kr pr enhet. Tegn grafen til profittfunksjonen

$$\pi(x) = 70x - K(x)$$

og finn ved hjelp av den hvor mye man bør produsere av varen for å tjene mest mulig.

Oppgave 22

Funksjonen g er gitt ved

$$g(x) = ax^3 - bx^2 - x + 1,$$

der a og b er konstanter.

(a) Bestem a og b når både $g(x)$ og $g'(x)$ skal være delelige med $x - 1$.

Funksjonen f, som er gitt ved

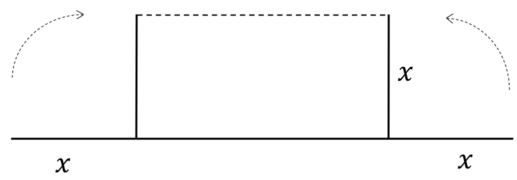
$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1,$$

har et nullpunkt $x = -1$.

(b) Løs ulikheten $f(x) > 0$.
(c) Finn $f'(x)$ og skriv uttrykket på faktorform.
(d) Bestem koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f. Hvor er f voksende og hvor er f avtakende?
(e) Finn ligningen til den rette linjen som tangerer grafen i punktet $(-1, 0)$.
(f) Tegn grafen til f og til tangentlinjen i (e) i samme diagram.

Oppgave 23

Av en lang blikkplate som er 40 cm bred, skal det lages en åpen renne. Vi bøyer opp x cm på hver side, slik at tverrsnittet av rennen blir et rektangel med høyde x cm.



Regn ut arealet av tverrsnittet uttrykt ved x. Bestem x og tverrsnittet når tverrsnittet er størst mulig.

Oppgaver til fredag 11. august

Oppgave 24

For hvilken verdi av a er følgende funksjon kontinuerlig for alle x? Er funksjonen deriverbar overalt når a har denne verdien?

$$f(x) = \begin{cases} ax - 1 & \text{hvis } x \leq 1 \\ 3x^2 + 1 & \text{hvis } x \geq 1 \end{cases}$$

Oppgave 25

Deriver følgende funksjoner

a) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ ved å bruke kjerneregelen
b) $f(x) = \frac{x}{1-x}$ ved å bruke kvotientregelen

Oppgave 26

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 4}{2x - 1}, \qquad x \neq \frac{1}{2}$$

Finn $f'(x)$. Bestem topp- og bunnpunktene på grafen til f. Tegn grafen til f.

Oppgave 27

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2}, \qquad x \neq 0$$

(a) Drøft fortegnet til $f(x)$.
(b) Bestem ligningene for asymptotene til grafen til f.
(c) Finn $f'(x)$. Bestem eventuelle maksimums- og minimumspunkter til f.
(d) Tegn grafen til f.

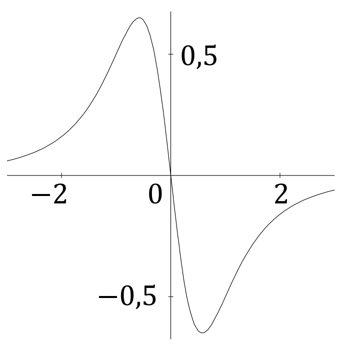
Oppgave 28

La $K(x)$ være kostnaden ved å produsere x enheter av en vare. Vis at den deriverte av enhetskostnaden $E(x) = \frac{K(x)}{x}$ er gitt ved

$$E'(x) = \frac{K'(x) - E(x)}{x}$$

Oppgave 29

Nedenfor har du gitt grafen til $f'(x)$. I tillegg får du vite at $f(0) = 1$ og at x-aksen er en horisontal asymptote for $f(x)$. Tegn grafen til $f(x)$ så godt du kan på grunnlag av dette.



Oppgave 30

En hurtigbåt går i trafikk mellom to havner, og kan ta maksimalt 100 passasjerer. Da prisen var 80 kr pr billett solgte man i gjennomsnitt 50 billetter pr tur. Senere ble prisen satt ned til 60 kr pr billett, og etter det solgte man i gjennomsnitt 70 billetter pr tur.

Anta at gjennomsnittlig antall solgte billetter pr tur er en lineær funksjon av prisen. Finn den billettprisen som maksimerer inntektene pr tur.

1. Innledning

Dette kompendiet er skrevet til bruk i Forkurs i matematikk ved bachelorstudiet ved Norges Handelshøyskole. Forkurset har i flere år blitt holdt intensivt i løpet av en uke i forkant av immatrikuleringen. Formålet med Forkurset er å gi en kort og rask repetisjon av noen sentrale emner i matematikk som er forutsatt dekket ved opptakskravet til NHH, det vil si Matematikk R1/S2 fra videregående skole eller tilsvarende.

Noen steder er disse notatene ganske utførlige, mens andre steder beskriver de mer kortfattet det som blir gjennomgått på Forkurset. For eksempel er ikke alle detaljene tatt med i alle eksemplene. I de tilfellene er resten av eksemplet å betrakte som en oppgave.

1.1 Matematikk og økonomi

Økonomer trenger å forstå hvordan økonomiske størrelser påvirker hverandre. Hva skjer med rentenivået i Norge når dollarkursen går ned? Hvordan går det med handelsbalansen? Hva med arbeidsledigheten? Som regel kan man ikke gjennomføre kontrollerte eksperimenter for å finne svar på slike spørsmål, slik man ofte gjør i naturvitenskapene. I stedet kan man gjennomføre teoretiske analyser av økonomiske modeller.

En økonomisk *modell* består av ulike matematiske *funksjoner* og *ligninger* mellom disse. Modellen vil ha ulike *variabler* og *parametere*, og vi gjenkjenner dem som ulike bokstaver i de matematiske uttrykkene. Noen modeller er detaljerte og skal gi en tilnærmet nøyaktig beskrivelse av virkeligheten, mens andre er mer skjematiske og bør betraktes som eksempler på hvordan virkeligheten kan arte seg. I modellen kan vi sette opp ulike forutsetninger og regne ut hvordan resultatet blir. Vi gjør dette ved å endre på ligningene eller på verdiene av parameterne i modellen. Dette kan gjøres på bakgrunn av økonomisk innsikt og/eller empiriske og statistiske undersøkelser.

Som en del av vårt matematiske grunnlag trenger vi å kunne håndtere matematiske uttrykk som opptrer i økonomiske modeller. Vi trenger å kunne regne ut størrelser og løse ligninger, og vi trenger å kunne drøfte svarene vi får og si hvordan de påvirkes av endringer i forutsetningene.

I de følgende eksemplene er vi ikke så opptatt av hvor formlene kommer fra, eller hva de betyr. Vi vil bare vise noen typiske uttrykk som vi trenger å være i stand til å regne med. Merk at i matematikk bruker vi ofte bokstavene x, y og z for variabler eller ukjente størrelser, mens a, b og c ofte blir brukt for parametere eller kjente størrelser. I økonomi er det imidlertid vanlig å prøve å bruke navn som forteller hvor størrelsene kommer fra, som r for rente, K for kapital, L for arbeidskraft (*labor*), etc. Vi kommer å møte eksempler på begge disse tradisjonene, og må derfor være forberedt å bruke en litt større del av alfabetet enn hva som er vanlig i videregående opplæring.

Eksempel 1.1

Når vi setter inn penger i banken så får vi rente på våre innskudd. Hvis $10\ 000$ kr står i banken i ett år, og den årlige renten er 3 %, så vil beløpet etter ett år har vokst til $10\ 000 \cdot 1{,}03 = 10\ 300$ kr. Etter to år har beløpet vokst til $10\,000 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03 = 10\,609$ kr, og etter ti år har beløpet vokst til $10\,000 \cdot 1{,}03^{10} = 13\,439{,}16$ kr.

Mer generelt, hvis A kr står i banken i n år til årlig rente r, så vil beløpet vokse til B kr der B er gitt ved formelen

$$B = A(1 + r)^n$$

(Hvis den årlige renten er p % så er $r = \frac{p}{100}$. Prosenttegnet kan alltid leses som «hundredeler».) Hvis vi kjenner A, r og n så kan vi beregne B. Men vi bør også kunne løse denne ligningen med hensyn på de andre bokstavene som inngår. Hvor stor skal A være for at vi skal kunne ta ut beløpet B etter n år når renten er r? Hvor lenge må vi vente for at A kr skal vokse til B kr når renten er r? Hva må renten være for at A kr skal vokse til B kr i løpet av n år?

Ingen av disse spørsmålene er spesielt vanskelige. For å svare på dem bruker vi grunnleggende egenskaper til potenser og logaritmer, som vi skal se nærmere på i løpet av Forkurset. Foreløpig nøyer vi oss med å stille noen spørsmål til ettertanke: Når skal vi bruke negative eksponenter? Når skal vi bruke brøkeksponenter? Når skal vi bruke logaritmer?

Eksempel 1.2

Når vi låner penger fra banken, for eksempel for å kjøpe en bolig, er det flere faktorer som påvirker hvor mye vi må betale tilbake hver måned. For et såkalt annuitetslån (uten gebyrer) kan dette beskrives ved formelen

$$K = \frac{a}{r}(1 - (1 + r)^{-n})$$

Her er K beløpet som vi får låne i dag. Dette skal betales tilbake med n like store beløp, hvor hvert beløp er gitt ved a. Disse beløpene skal dekke både avdrag og renter på lånet. Det er vanlig at beløpene betales hver måned (første gang en måned etter låneopptak), slik at n blir antall måneder som lånet skal nedbetales på, og r blir da månedsrenten. Hvis den årlige rentesatsen er R så er $r = \frac{R}{12}$.

Det er mange måter å bruke denne formelen på. La oss si at vi har råd til å betale 10 000 kroner i måneden, og vi vil vite hvor stort lån vi da kan ta opp. Den årlige rentesatsen er kanskje 6 %, slik at månedsrenten blir $r = \frac{0{,}06}{12} = 0{,}005$. Vi blir enige med banken om at en nedbetalingstid på 20 år høres greit ut, slik at antall måneder blir $n = 20 \cdot 12 = 240$. Ved å sette inn verdiene for a, r og n i formelen ovenfor finner vi at beløpet vi da kan få låne er $K = 1\,395\,807{,}20$ kroner.

Dette beløpet er kanskje ikke tilstrekkelig i forhold til hva vi trenger. Vi ønsker å låne $K = 2\,000\,000$ kroner. Med samme n og r som ovenfor så kan vi løse ligningen med hensyn på a, og vi finner da løsningen $a = 14\,328{,}62$ kroner, som blir det beløpet vi må betale hver måned i 20 år.

Hvis vi fremdeles ønsker å låne $K = 2\,000\,000$ kroner, men synes at det månedlige beløpet ovenfor blir for mye, så kan et alternativ være å forlenge nedbetalingstiden. La oss si at vi kan strekke oss til $a = 12\,000$ kroner hver måned, og at rentesatsen r er den samme som før. Hvor lang nedbetalingstid får vi da? Når vi setter inn tallene og løser for n så finner vi løsningen $n = 359{,}2$. Dette svarer til en nedbetalingstid på nesten 30 år.

For å kunne regne ut disse svarene trenger vi å kunne omformulere formelen ovenfor. Vi trenger å kunne løse ligningen med hensyn på den størrelsen vi er interessert i. I regningen trenger vi å kunne håndtere negative eksponenter og bruke logaritmer.

For en dypere forståelse bør vi også forstå hvordan formelen $K = \frac{a}{r}(1-(1+r)^{-n})$ oppstår[1]. Dette er til hjelp når de ytre forholdene endrer seg på en slik måte at formelen ikke kan brukes slik den står. For eksempel kan det skje en renteendring underveis i tilbakebetalingsperioden, der vi trenger å regne ut hvilke følger det vil få for vårt lån. Vi har ikke ferdige formler for alle mulige slike situasjoner, og må i så fall utlede de formlene vi trenger i den enkelte situasjon.

Eksempel 1.3

Følgende uttrykk, som er et eksempel på en såkalt *nyttefunksjon*, brukes ofte av økonomer for å beskrive en konsument.

$$z = Ax^a y^b$$

Her tenker vi oss at konsumenten kan konsumere to varer, og at x er mengden av den ene varen, mens y er mengden av den andre varen. Bokstavene A, a og b står for tall som hører til konsumenten. Vi kan for eksempel ha $A = 10$, $a = \frac{1}{2}$ og $b = \frac{1}{3}$. For en annen konsument kan disse bokstavene ha andre verdier.

Når vi kjenner verdien av alle bokstavene A, a, b, x og y, så kan vi regne ut høyresiden $Ax^a y^b$ og på den måten finne verdien til z. Dette tallet kalles *nytten* til konsumenten når han eller hun konsumerer mengdene x og y av de to varene. Hvis for eksempel A, a og b har samme verdier som i forrige avsnitt, og $x = 9$, $y = 8$, så får vi at nytten blir

$$z = 10 \cdot 9^{1/2} \cdot 8^{1/3} = 10 \cdot 3 \cdot 2 = 60.$$

Vi vil ikke gå inn på hvordan man skal *tolke* et slikt nyttebegrep, men overlater det til økonomiemnene i bachelorstudiet. Her vil vi fokusere på hvordan man *regner* med slike uttrykk. Når det gjelder tolkning nøyer vi oss med å slå fast at *mer* nytte er bedre enn *mindre* nytte.

I talleksemplet ovenfor er eksponentene gitt som brøker, $a = \frac{1}{2}$ og $b = \frac{1}{3}$. Det er vanlig å bruke verdier som tilfredsstiller $0 < a < 1$ og $0 < b < 1$. For å kunne regne med slike uttrykk må man beherske regnereglene for potenser.

For eksempel kan vi ta utgangspunkt i talleksemplet ovenfor, hvor vi fant at nytten ble $z = 60$. Hvis konsumenten får mer av den første varen så vil x øke, og verdien av z vil da også øke. Hvor mye må x øke for at z skal bli dobbelt så stor, $z = 120$? Alle størrelser unntatt x er nå kjent, og vi setter opp ligningen

$$120 = 10 \cdot x^{1/2} \cdot 8^{1/3}$$

Etter litt regning finner vi svaret $x = 36$. Det vil si at mengden av den første varen må øke fra 9 til 36 for at nytten skal bli dobbelt så stor.

[1] Vi vil ikke gå inn på dette i Forkurset, men vil ta opp det i MET1 senere i høst.

Kombinasjonen $x = 9$ og $y = 8$ gir nytten $z = 60$, men det fins mange andre kombinasjoner av x og y som gir den samme nytten. For å finne disse kombinasjonene må man løse følgende ligning med hensyn på y:

$$10 \cdot x^{1/2} \cdot y^{1/3} = 60$$

Dette gir løsningen $y = 216x^{-3/2}$. Vi kan tegne grafen til denne funksjonen, og får da vist frem alle kombinasjoner av x og y som konsumenten oppfatter som like gode som $x = 9$ og $y = 8$. Denne kurven er sentral i økonomisk teori, og vi kommer senere i høst å se på hvordan man kan regne seg frem til det billigste punktet på denne kurven når man har fått oppgitt prisene på de to varene.

Et annet eksempel, som kan være mer interessant for økonomer, er å drøfte hvordan konsumenter forandrer sitt forbruksmønster når det blir innført en avgift på den ene varen. Uttrykk som $z = Ax^a y^b$ blir brukt for å lage eksempler som illustrerer den økonomiske teorien. Dette er spørsmål som vil bli tatt opp i økonomikursene (særlig mikroøkonomi).

Vi vender tilbake til det matematiske grunnlaget, og motivert av eksemplene ovenfor begynner vi med *potensregning*.

2. Potenser

Gjentatt multiplikasjon kan beskrives ved potenser hvor eksponentene er positive hele tall.

$$x^3 = x \cdot x \cdot x$$

$$x^n = x \cdots x \qquad (n \text{ ganger})$$

Spesielt er $x^1 = x$.

Uttrykket x^n kalles en *potens*, der x er *grunntallet* og n er *eksponenten*.

2.1 Regneregler for potenser (foreløpig liste)

Fra definisjonen $x^n = x \cdots x$ finner vi nokså lett følgende regneregler når eksponentene a og b er positive hele tall. Det er bare å skrive ut hva uttrykkene står for og omgruppere faktorene litt.

$$x^a x^b = x^{a+b}$$

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

$$(xy)^a = x^a y^a$$

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

Eksempel 2.1

Uttrykket $(x^2)^3$ er i følge definisjonen det samme som $x^2 \cdot x^2 \cdot x^2$. Vi setter inn $x^2 = x \cdot x$ og får at $(x^2)^3 = (x \cdot x) \cdot (x \cdot x) \cdot (x \cdot x) = x^6$. Vi ser at det er det samme som vi får når vi bruker den siste av reglene ovenfor, som sier at $(x^2)^3 = x^{2 \cdot 3} = x^6$. Det er også det samme som $(x^3)^2 = (x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x) = x^6$.

Eksempel 2.2

Pass på at fortegnene blir riktige! Vi har for eksempel $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$. Merk at dette er forskjellig fra $-2^2 = -(2^2) = -4$. Når det ikke står noen parenteser så er konvensjonen at potenser skal beregnes *før* multiplikasjon og divisjon. Uttrykket cx^a står derfor for $c \cdot x^a$ og ikke for $(cx)^a$. På samme måte står $-x^a$ for $(-1) \cdot x^a$ og ikke for $(-x)^a$.

Vi vil nå *utvide* disse regnereglene til å dekke også tilfeller hvor eksponentene *ikke* er positive heltall. Det er to spørsmål som melder seg:

(i) Hva *betyr* uttrykket x^a når a ikke er et positivt heltall (som for eksempel i $x^{-2/5}$ eller $x^{-0,4}$)?

(ii) Fortsetter regnereglene å gjelde når vi ikke kan snakke om gjentatt multiplikasjon, eller må vi ta noen forbehold?

2.2 Potenser med negative eksponenter

Ovenfor har alle eksponenter vært *positive hele* tall (det vil si tallene $1, 2, 3, 4, \ldots$). Den andre av potensreglene i listen ovenfor sier at $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$, og dersom resultatet x^{a-b} skal ha en positiv eksponent så må vi ha $a > b$. I stedet for å kreve dette så velger vi å *utvide* potensnotasjonen, slik at vi *også tillater negative* eksponenter. Vi kan da skrive for eksempel

$$\frac{2}{4} = \frac{2^1}{2^2} = 2^{1-2} = 2^{-1}.$$

For at dette skal bli riktig må vi ha $2^{-1} = \frac{1}{2}$. Dette og andre lignende eksempler leder oss til å definere

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

$$x^0 = 1$$

Dette kan vi gjøre så lenge $x \neq 0$, for ellers får vi 0 i nevneren. Det er ikke så vanskelig å vise at regnereglene vi satte opp i avsnitt 2.1 ovenfor fremdeles gjelder når eksponentene er hele tall, positive eller negative.

De to første regnereglene for potenser var $x^a x^b = x^{a+b}$ og $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$. Når a og b får lov til å være både positive og negative tall så kan vi kan slå sammen disse to regnereglene til *en* regel. Ved å bruke den første regelen $x^a x^b = x^{a+b}$ og definisjonen $x^{-b} = \frac{1}{x^b}$ så finner vi

$$\frac{x^a}{x^b} = x^a \cdot \frac{1}{x^b} = x^a \cdot x^{-b} = x^{a+(-b)} = x^{a-b}.$$

Den andre potensregelen følger da av den første. (Vi velger likevel å ta med begge regnereglene i vår oversikt i avsnitt 2.4 nedenfor.)

Eksempel 2.3

Vi bruker potensreglene ovenfor ved renteregning. Hvis for eksempel 12 000 kr står i banken i åtte år til årlig rente 4 %, så vokser beløpet til $12\,000 \cdot 1{,}04^8 = 16\,422{,}83$ kr.

Hvis vi i stedet ønsker å sette inn ett større beløp A slik at vi skal kunne ta ut 20 000 kr etter åtte år, så får vi ligningen $A \cdot 1{,}04^8 = 20\,000$, eller $A = 20\,000 \cdot \frac{1}{1{,}04^8} = 20\,000 \cdot 1{,}04^{-8} = 14\,613{,}80$ kr.

Mer generelt vil A kr i løpet av n år til årlig rente r vokse til $A \cdot (1 + r)^n$. (Hvis den årlige renten er p % så er $r = \frac{p}{100}$.) For at beløpet A skal vokse til beløpet B i løpet av disse n årene så må vi ha

$$B = A(1 + r)^n$$

Da blir

$$A = \frac{B}{(1+r)^n} = B(1+r)^{-n}$$

2.3 Potenser med rasjonale og irrasjonale eksponenter

Vi minner om at et *rasjonalt tall* er det samme som en *brøk*. Det vil si at det kan skrives på formen $\frac{a}{b}$ hvor a og b er hele tall og $b > 0$.

Hvis $x \geq 0$ så er kvadratroten av x definert slik at $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$. For eksempel er $\sqrt{4} = 2$, ettersom vi har $2 \cdot 2 = 4$. Vi ser at hvis vi innfører notasjonen $\sqrt{x} = x^{1/2}$ så kan dette skrives som $x^{1/2}x^{1/2} = x^1$. Dette er i samsvar med tidligere regneregler, der vi multipliserer sammen potenser med samme grunntall ved å legge sammen eksponentene, slik at $x^{1/2}x^{1/2} = x^{1/2+1/2} = x^1$.

Vi bruker dette til å *utvide* vår notasjon for potenser til å gjelde også for rasjonale eksponenter, og vi definerer

$$x^{a/b} = \sqrt[b]{x^a}$$

når $x > 0$ og når a og b er hele tall og b er positivt. Regnereglene for potenser gjelder da også når vi har brøk som eksponenter.

Vi foretrekker som regel å skrive potenser med brøkeksponent (for eksempel $x^{2/3}$) fremfor rotuttrykk (som $\sqrt[3]{x^2}$), da det i praksis er lettere å regne med brøkeksponenter. Et mulig unntak er kvadratrøtter, hvor $x^{1/2}$ og $\sqrt{x}$ nok er like vanlige og kan fungere like godt.

Eksempel 2.4

$$\sqrt{12} = 12^{1/2} = (2^2 \cdot 3)^{1/2} = 2^{2/2} \cdot 3^{1/2} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{18} = 18^{1/2} = (2 \cdot 3^2)^{1/2} = 2^{1/2} \cdot 3^{2/2} = 3\sqrt{2}$$

Kommentar om kvadratrøtter

$\sqrt{x}$ er alltid definert som den *positive* kvadratroten til x. For eksempel er $\sqrt{4} = 2$. På samme måte er $\sqrt[n]{x}$ definert som den *positive* n-teroten til x, der n er et positivt heltall. Det vil si at $\sqrt[n]{x}$ er det positive tallet y som har egenskapen at $x = y \cdots y$ (n ganger). Man kan vise at det fins nøyaktig ett tall y med denne egenskapen når n og $x > 0$ er gitte.

Eksempel 2.5

Ligningen $x^2 = 9$ har løsningen $x = 3$ eller $x = -3$. Hvis vi vil ha med begge løsningene i samme uttrykk, så kan vi skrive $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$. Derimot vil $x = \sqrt{9} = \pm 3$ være unøyaktig, siden $\sqrt{9} = +3$ og ikke ± 3.

Irrasjonelle eksponenter

Ikke alle tall kan skrives som hele tall eller brøk. Et eksempel er $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$. Slike tall kalles irrasjonale tall. Vi definerer potenser med irrasjonale eksponenter «ved kontinuitet». Vi velger ikke å være *helt* presise på hva dette betyr, men det innebærer at siden

$$\sqrt{2} \approx 1{,}4142 = \frac{14142}{10000}$$

så skal $x^{\sqrt{2}} \approx x^{14142/10000}$, som vi har definert ovenfor. Hvis vi bruker en mer nøyaktig rasjonal tilnærming til $\sqrt{2}$ så får vi en mer nøyaktig tilnærming til $x^{\sqrt{2}}$. Regnereglene for potenser gjelder også når eksponentene er irrasjonale.

2.4 Regneregler for potenser

Vi oppsummerer regnereglene for potenser:

$$x^a x^b = x^{a+b}$$

$$(xy)^a = x^a y^a$$

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

$$x^{a/b} = \sqrt[b]{x^a} \qquad (a/b \text{ brøk med } b > 0)$$

$$x^0 = 1$$

Disse gjelder alle når grunntallet er > 0. Grunntall $= 0$ går greit så lenge vi ikke får null i nevneren (eller null opphøyd i en negativ eksponent). *Negative grunntall* skal vi passe oss for, da regnereglene ofte ikke gjelder da. Det skyldes at vi kan få problemer med røtter av negative tall. Når eksponentene er *hele tall* så gjelder regnereglene for både positive og negative grunntall.

Advarsel: Merk at $(x + y)^n \neq x^n + y^n$. (Prøv gjerne med noen små tall hvis du er usikker på om en regneregel gjelder eller ikke!)

Eksempel 2.6

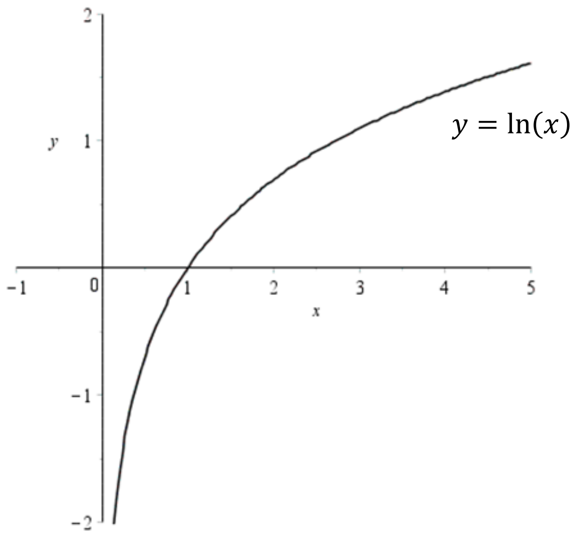
Hvor er feilen?

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{2\cdot 1/2} = ((-1)^2)^{1/2} = (1)^{1/2} = 1$$

Dette viser at regnereglene for potenser ikke alltid gjelder når grunntallet er negativt. Her er det den midterste likheten som ikke er korrekt.

2.5 Logaritmer

Vi kan bruke regnereglene for potenser når vi vil ha tak på grunntallet til en potens. Hvis for eksempel $a^b = c$ så er $a = c^{1/b}$. Hvis vi derimot vil ha tak på *eksponenten* til en potens så trenger vi å bruke *logaritmer*. Det fins ulike logaritmer, men i dette kurset vil vi bare arbeide med såkalte *naturlige* logaritmer. Den naturlige logaritmen til x er definert bare hvis $x > 0$, og den blir betegnet med $\ln(x)$. Den kan beregnes ved hjelp av kalkulator, og har en graf som på figuren her:



Vi vil se nærmere på logaritmer (og eksponentialfunksjoner) i kapittel 5 av dette kompendiet, men vi nevner allerede her en viktig regneregel for logaritmer:

$$\ln\left(a^b\right) = b\ln(a) \qquad\qquad (a > 0)$$

Med denne regneregelen (og en kalkulator!) kan vi få regnet ut eksponenten b i en potens a^b. Hvis $a^b = c$, der a og c er kjente men b er ukjent, så tar vi logaritmen på begge sider og får $\ln\left(a^b\right) = b\ln(a) = \ln(c)$. Dermed blir $b = \frac{\ln(c)}{\ln(a)}$.

Eksempel 2.7

Hvis renten er 3 % i året og vi setter 10 000 kr i banken, hvor lenge må vi vente til dette beløpet har vokst til 15 000 kr?

Vi trenger å finne n slik at $10\,000 \cdot 1{,}03^n = 15\,000$. Vi vil bruke regnereglene til å få n alene på venstre side av likhetstegnet. Vi dividerer først ligningen med 10 000 og får

$$1{,}03^n = \frac{15\,000}{10\,000} = 1{,}5$$

Vi tar nå logaritmen på begge sider:

$$\ln(1{,}03^n) = \ln(1{,}5)$$

Ved å bruke regneregelen for logaritmer ovenfor, så kan vi venstresiden her skrives som $\ln(1{,}03^n) = n\ln(1{,}03)$. Dette gir oss

$$n \ln(1{,}03) = \ln(1{,}5)$$

For å finne n så dividerer vi ligningen med $\ln(1{,}03)$ og slår inn på kalkulator. Det gir at

$$n = \frac{\ln(1{,}5)}{\ln(1{,}03)} \approx \frac{0{,}4054}{0{,}0295} = 13{,}71$$

Dette betyr at først etter 14 år vil beløpet ha passert $15\,000$ kr. (Vi velger her å regne med *hele* år, og gir ikke noen egen tolkning til desimalene i svaret $13{,}71$.)

Eksempel 2.8

Vi gjentar regningen ovenfor mer generelt, og vil nå løse ligningen $B = A(1+r)^n$ med hensyn på n. Vi deler med A på begge sider av likhetstegnet og får

$$(1+r)^n = \frac{B}{A}$$

Vi tar nå naturlig logaritme på begge sider av likhetstegnet.

$$\ln((1+r)^n) = \ln\left(\frac{B}{A}\right)$$

Venstresiden kan vi skrive som $n\ln(1+r)$, slik at vi får

$$n\ln(1+r) = \ln\left(\frac{B}{A}\right)$$

Vi skal løse med hensyn på n, og vil derfor ha n alene på venstresiden. Det får vi ved å dividere med $\ln(1+r)$ på begge sider av likhetstegnet, hvilket gir

$$n = \frac{\ln\left(\frac{B}{A}\right)}{\ln(1+r)}$$

Det er også mulig å bruke en annen regneregel for logaritmer, som sier at $\ln\left(\frac{B}{A}\right) = \ln(B) - \ln(A)$, og skrive svaret som

$$n = \frac{\ln(B) - \ln(A)}{\ln(1+r)}$$

Hvis vi setter inn $A = 10\,000$, $B = 15\,000$ og $r = 0{,}03$ så finner vi samme svar $n = 13{,}71$ som i forrige eksempel.

3. Fortegnsdrøfting

En vanlig problemstilling i en økonomisk analyse er å undersøke konsekvensene av en endring fra dagens situasjon. Det kan være rentenivået, oljeprisen, skattenivået, valutakursen e.l. som endres, og så ønsker man å si hva som skjer med arbeidsledighet, brutto nasjonalprodukt, handelsbalanse, etc. Man kan da sette opp en økonomisk modell, som består av ulike variabler og ligninger. Endringen kan uttrykkes ved hjelp av variablene, og blir ofte et litt komplisert uttrykk. I blant er det entydig i hvilken retning endringen går, i blant avhenger det av størrelsen på variablene. For å drøfte dette kan man se på fortegnet til endringen.

Eksempel 3.1

La $f(x) = x(1-x)$. For hvilke x er $f(x)$ positiv, og for hvilke x er $f(x)$ negativ?

Funksjonen $f(x)$ er et produkt av to faktorer, x og $1-x$. Hvis begge faktorene er positive, $x > 0$ og $1-x > 0$, så er produktet positivt. Dette skjer når $0 < x < 1$. Hvis en faktor er positiv og den andre negativ så blir produktet negativt. Dette skjer hvis $x > 0$ og $1-x < 0$, eller hvis $x < 0$ og $1-x > 0$. Det første tilfellet blir det samme som $x > 1$, og det andre tilfellet blir det samme som $x < 0$. I disse to tilfellene blir altså $f(x) < 0$. Til slutt har vi tilfellet hvor begge faktorene er negative, $x < 0$ og $1-x < 0$, men her blir disse betingelsene motsigende og kan ikke gjelde samtidig.

Vi kan på tilsvarende måte drøfte fortegn til uttrykk på faktorisert form ved å bruke *fortegnsreglene*:

3.1 Fortegnsregler

$$\text{pluss} \cdot \text{pluss} = \text{pluss}$$

$$\text{pluss} \cdot \text{minus} = \text{minus}$$

$$\text{minus} \cdot \text{pluss} = \text{minus}$$

$$\text{minus} \cdot \text{minus} = \text{pluss}$$

Merk at fortegnsreglene også gjelder for divisjon.

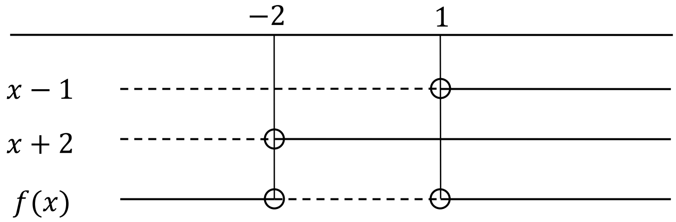
Den andre og tredje regelen kan motiveres ved eksempler om penger og gjeld. Vi kan bruke positive størrelser for å angi beløp vi eier og negative størrelser for å angi beløp vi skylder. Multiplikasjonen $2 \cdot (-10)$ kan da stå for at en gjeld på 10 kr er fordoblet. Resultatet er da en gjeld på 20 kr, eller en formue på -20 kr.

Men hvorfor skal minus ganger minus være pluss? Hovedgrunnen er at vi vil at regneregelen $a(b+c) = ab + ac$ skal gjelde for alle reelle tall a, b, c, både positive og negative. Sett inn $a = -1$, $b = -1$, $c = 1$ og regn ut. Vi finner da at $a(b+c) = 0$ og $ab + ac = (-1) \cdot (-1) - 1$. Hvis disse to uttrykkene skal være like store så må vi ha at $(-1) \cdot (-1) - 1 = 0$, og dermed at $(-1) \cdot (-1) = 1$.

For å finne fortegnet til et uttrykk på faktorisert form så drøfter vi fortegnet ved hjelp av fortegnsreglene.

Eksempel 3.2

La $f(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$. Vi tegner fortegnsdiagram og drøfter fortegnet til $f(x)$. Vi må da bruke det faktoriserte uttrykket for $f(x)$.



Den øverste linjen er en tallinje som viser verdier som x kan ha. De spesielle verdiene -2 og 1 er markert særskilt. De andre linjene beskriver fortegnet til uttrykket til venstre for ulike x-verdier. De stiplede linjene forteller hvor et uttrykk er negativt, og heltrukken linje forteller hvor uttrykket er positivt. Fortegnet til $f(x)$ finner vi ved hjelp av fortegnsreglene. Vi ser at $f(x) > 0$ for $x < -2$ og for $x > 1$, og at $f(x) < 0$ for $-2 < x < 1$.

Eksempel 3.3

La $f(x) = \frac{(x-1)(x-3)^2}{x-2}$. Drøft med fortegnsdiagram.

3.2 Faktorisering

Når vi har et faktorisert uttrykk, som $f(x) = (x-1)(x+2)$ i eksempel 3.2 ovenfor, så kan vi drøfte fortegnet med fortegnsdiagram. Men hvis uttrykket er gitt på formen $f(x) = x^2 + x - 2$ så må vi først *faktorisere* det. Vi har ulike verktøy som vi kan bruke for å bearbeide uttrykk og få dem over på en mer velegnet form, og som vi omtaler i de følgende avsnittene.

3.3 Den distributive loven (regning med parenteser)

Den distributive loven sier at

$$a(b+c) = ab + ac$$

og den gjelder for alle mulige valg av a, b, c. Vi bruker denne regelen begge veier, både til å multiplisere ut og til å faktorisere. Ved enkle modifiseringer (bytt ut en eller flere av bokstavene med andre uttrykk) får vi frem varianter som

$$a(b - c) = ab - ac$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Det er lett å få slurvefeil når man multipliserer sammen parenteser med flere ledd, særlig når noen av dem er negative. Det er også mange som prøver å bruke de distributive lovene i tilfeller hvor de ikke gjelder. Dette skjer ved at man ubetenksomt går ut fra at man kan «multiplisere ut» hver gang en faktor møter en parentes, men dette gjelder bare for multiplikasjon med en sum. For eksempel er

$$a(b + c)^2 \neq (ab + ac)^2$$

siden høyresiden er $(ab + ac) \cdot (ab + ac) = a(b + c) \cdot a(b + c) = a^2(b + c)^2$.

3.4 Kvadratsetningene

Tre viktige spesialtilfeller av den distributive loven er gitt ved kvadratsetningene

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Disse setningene kalles for henholdsvis første, andre og tredje kvadratsetning. Den siste setningen blir også kalt for konjugatsetningen.

Disse setningene må vi kunne bruke, også når vi bytter ut a og b med andre uttrykk. Av og til trenger vi å kunne bruke dem baklengs, særlig den siste av dem.

Eksempel 3.4

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4) = 2(x + 2)(x - 2)$$

$$49 \cdot 51 = (50 - 1)(50 + 1) = 50^2 - 1^2 = 2500 - 1 = 2499$$

Det er mulig å multiplisere ut høyere potenser ved gjentatt bruk av setningene ovenfor (eller ved hjelp av Pascals trekant, hvis man kjenner til den). Vi har for eksempel

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Her er imidlertid venstresiden mer oversiktlig og informativ enn høyresiden, slik at vi foretrekker normalt å beholde uttrykket på den formen.

Generelt råd
Hold uttrykkene mest mulig faktorisert, og multipliser ikke ut uten grunn!

Eksempel 3.5
For å drøfte brøkuttrykk så setter vi først uttrykkene på felles brøkstrek.

$$x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}=\frac{(x+1)(x-1)}{x}$$

Advarsel
Noen stryker tilsynelatende uhemmet samme tall (eller bokstav) i teller og nevner av en brøk uten å tenke på om de er faktorer eller ikke. For eksempel kan vi ikke forkorte brøken $\frac{2x}{x+2}$.

3.5 Annengradsligninger og faktorisering
Ligningen $ax^2+bx+c=0$ har løsningene

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{og} \qquad x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

I noen tilfeller får vi bare en løsning (når $b^2-4ac=0$, slik at begge uttrykkene ovenfor blir lik $-\frac{b}{2a}$), og i noen tilfeller får vi ingen løsning (når $b^2-4ac<0$, slik at uttrykket under kvadratrottegnene blir negativt).

Hvis annengradsligningen $ax^2+bx+c=0$ har løsningene $x=x_1$ og $x=x_2$ så kan vi faktorisere

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

Merk de forskjellige rollene de ulike bokstavene har. Her er x en variabel, mens x_1 og x_2 er spesielle verdier (tall) som x kan anta. Bokstavene a,b,c er parametrer, som vi tenker oss skal være gitt før vi begynner å regne.

Eksempel 3.6
Gitt ligningen $2x^2-3x-2=0$. Finn løsningene og faktoriser venstresiden.

En praktisk måte å løse denne ligningen på er å tegne grafen og lese av nullpunktene. Noen kalkulatorer har en innebygget funksjon for å løse slike ligninger. Men vi bør også kunne løse dem ved regning. Løs med formel og finn løsningene $x=2$ og $x=-\frac{1}{2}$. Vi kan da skrive

$$2x^2-3x-2=2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(x-2)(2x+1)$$

Eksempel 3.7
Drøft fortegnet til $2x - x^2$. Her faktoriserer vi direkte, og setter x utenfor parentes. (Det er i dette tilfellet mer tungvint å finne nullpunkter ved løsning av annengradsligning, selv om det også er mulig.) Resultatet blir at $2x - x^2 > 0$ for $0 < x < 2$.

Eksempel 3.8
Drøft fortegnet til $2 + x - x^2$. Her trenger vi å løse annengradsligningen $2 + x - x^2 = 0$ for å finne røttene. (Løsning: $x = 2$ eller $x = -1$.)

3.6 Utledning av løsningsformelen for annengradsligninger
Formlene ovenfor som gir oss løsningene av annengradsligningen $ax^2 + bx + c = 0$ er litt kompliserte, men de fremkommer ganske naturlig når vi faktoriserer uttrykket $ax^2 + bx + c$. For å få til dette bruker vi en metode som kalles for *komplettering av kvadrat*, og som egentlig er en systematisk bruk av kvadratsetningene baklengs. Vi ser først på et konkret eksempel.

Eksempel 3.9
La oss se på ligningen

$$x^2 - 10x + 24 = 0$$

Uttrykket på venstre side av likhetstegnet ligner på noe vi kan få med andre kvadratsetning, $(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$. Men hvis vi prøver med $u = x$ og $-2uv = -10x$ så blir $v = 5$, og vi får $v^2 = 25$ i stedet for 24. Den lure idéen er nå å legge til 1 på hver side av likhetstegnet, slik at vi får

$$x^2 - 10x + 25 = 1$$

Nå kan vi skrive dette som

$$(x - 5)^2 = 1$$

Vi trekker kvadratroten av hver av sidene, og finner

$$x - 5 = +1 \qquad \text{eller} \qquad x - 5 = -1$$

De to løsningene blir dermed $x = 5 + 1 = 6$ og $x = 5 - 1 = 4$.

(*Resten av avsnittet er litt tungt og kan hoppes over*! *Det er den samme utregningen som i eksemplet ovenfor, men med bokstaver.)* Vi vender nå tilbake til den generelle annengradsligningen $ax^2 + bx + c = 0$, og prøver å gjennomføre resonnementet ovenfor mer generelt. Første kvadratsetning kan skrives på formen $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$. Vi ønsker å bruke denne formelen, men har et lite problem ved at det første leddet ax^2 ikke er et kvadrat. Det løser vi ved å sette a utenfor parentes, og vi får da

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Vi ønsker nå å bruke første kvadratsetning $(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$ baklengs på parentesen, med $u^2 = x^2$ og $2uv = \frac{b}{a}x$. Problemet er at da blir $v = \frac{b}{2a}$, slik at $v^2 \neq \frac{c}{a}$. Vi løser dette ved å legge til og trekke fra «riktig» verdi slik at vi får et ledd som blir lik $v^2 = \frac{b^2}{4a^2}$.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

Vi kan nå bruke første kvadratsetning $(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$ baklengs på de tre første leddene i parentesen, med $u = x$ og $v = \frac{b}{2a}$, og vi får da

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

Nå vil vi bruke tredje kvadratsetning baklengs, $u^2 - v^2 = (u+v)(u-v)$. Vi samler da de to siste leddene i parentesen og skriver dem som et kvadrat med negativt fortegn.

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right)$$

Vi bruker nå tredje kvadratsetning $u^2 - v^2 = (u+v)(u-v)$ baklengs på den siste parentesen, med $u = x + \frac{b}{2a}$ og $v = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Vi får da

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \\ &= a\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \end{aligned}$$

Hvis vi nå innfører $x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ og $x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ så får vi faktoriseringen

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

og vi ser at x_1 og x_2 blir nullpunktene til polynomet $ax^2 + bx + c$. Dette er de samme formlene som vi satte opp i begynnelsen av avsnitt 3.5.

3.7 Nullpunkter og faktorisering

Har vi et *nullpunkt* i et polynom så hjelper det oss til å faktorisere polynomet. Hvis $f(x)$ er et polynom og $x = a$ er et nullpunkt, det vil si at $f(a) = 0$, så er $x - a$ en *faktor* i $f(x)$. Det betyr at vi kan skrive

$f(x) = (x-a) \cdot g(x)$ for et passende valgt polynom $g(x)$. Graden til polynomet $g(x)$ er én mindre enn graden til $f(x)$. I det første eksemplet nedenfor finner vi $g(x)$ ved prøving og feiling, men i neste avsnitt viser vi hvordan vi lettere kan regne oss frem til hva $g(x)$ er.

Eksempel 3.10

I eksempel 3.6 så vi på andregradspolynomet $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$. Hvis vi ser at $f(2) = 8 - 6 + 2 = 0$, det vil si at $x = 2$ er et nullpunkt for $f(x)$, så vet vi at

$$f(x) = (x-2) \cdot g(x)$$

for et førstegradspolynom $g(x)$. Det vil si at $g(x) = ax + b$ for passende tall a og b. Dermed har vi

$$2x^2 - 3x - 2 = (x-2)(ax+b)$$

For å finne a og b kan vi multiplisere ut høyresiden. Vi får da

$$2x^2 - 3x - 2 = ax^2 - 2ax + bx - 2b = ax^2 + (b-2a)x - 2b$$

Vi sammenligner koeffisientene foran x^2 og finner at $a = 2$. Konstantleddene forteller at $-2b = -2$, eller at $b = 1$. Koeffisientene foran x forteller nå at $b - 2a = -3$, og vi ser at det stemmer når $a = 2$ og $b = 1$. Dermed blir $g(x) = ax + b = 2x + 1$.

Metoden i eksemplet ovenfor er imidlertid ikke den beste måten å gå frem på. Det er lettere å finne polynomet $g(x)$ ved å bruke *polynomdivisjon*:

3.8 Polynomdivisjon

Hvis polynomet $f(x)$ har et nullpunkt $x = a$ så fins det en faktorisering $f(x) = (x-a) \cdot g(x)$. I eksemplet ovenfor fant vi $g(x)$ ved å sette inn et generelt polynom av riktig grad, multiplisere ut og løse for koeffisientene. En mindre arbeidskrevende og mer oversiktlig måte er å finne $g(x)$ ved polynomdivisjon, der vi dividerer $f(x)$ med $x - a$. Polynomdivisjon følger samme mønster som lang divisjon med tall.

Eksempel 3.11

Vi beregner $(2x^2 - 3x - 2)/(x-2)$ ved hjelp av polynomdivisjon.

$$\begin{array}{l}
2x^2 - 3x - 2 : x - 2 = 2x + 1 \\
\underline{2x^2 - 4x} \\
\qquad\quad x - 2 \\
\qquad\quad \underline{x - 2} \\
\qquad\qquad\ 0
\end{array}$$

Forklaring av metoden: Vi ser på leddene av høyest grad i de to polynomene $2x^2 - 3x - 2$ og $x - 2$. Disse leddene er henholdsvis $2x^2$ og x. Vi spør hvor mange ganger x går opp i $2x^2$. Svaret er $2x$, som blir første ledd i svaret. Vi multipliserer deretter $2x$ med $x - 2$ og får $2x^2 - 4x$, som vi trekker fra det opprinnelige polynomet. Vi sitter igjen med $x - 2$, og ser at $x - 2$ går opp i dette uttrykket nøyaktig 1 gang. Neste ledd i svaret blir dermed 1. Vi multipliserer 1 med $x - 2$ og trekker resultatet fra det vi har igjen av det opprinnelige polynomet. Resultatet blir 0, slik at divisjonen går opp.

Eksempel 3.12

La $f(x) = 2 + x - x^2$. Hvis vi ser at $f(2) = 0$ så vet vi at $x - 2$ er en faktor i polynomet $f(x)$. Vi kan da dividere

$$-x^2 + x + 2 : x - 2 = -x - 1$$

og finne at $2 + x - x^2 = -(x - 2)(x + 1)$.

Eksempel 3.13

La $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$. Ved å tegne grafen eller å prøve noen verdier kan vi finne at $f(1) = 0$. Det følger at $x - 1$ må være en faktor i polynomet $f(x)$, og polynomdivisjon gir at

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 : x - 1 = x^2 + 5x + 6$$

Ved å løse en annengradsligning finner vi at $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$, slik at vi ender opp med faktoriseringen

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x + 2)(x + 3)$$

Eksempel 3.14

Hvis vi prøver å faktorisere et polynom som $x^2 - 2x + 3$ så ser vi først etter nullpunkter til polynomet. Men her gir formelen for andregradsligninger at $x = 1 \pm \sqrt{-2}$, som ikke er et reelt tall, siden vi ikke kan ta kvadratroten av et negativt tall. Polynomet har derfor ingen nullpunkter, og vi kan ikke faktorisere det videre. Vi kan også se dette fra grafen til polynomet, som aldri krysser x-aksen. Og vi kan se det fra omskrivningen

$$x^2 - 2x + 3 = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x - 1)^2 + 2$$

som er gyldig for alle x. Siden leddet $(x - 1)^2$ aldri kan bli negativt så kan uttrykket $(x - 1)^2 + 2$ aldri bli mindre enn 2. Spesielt kan det aldri bli null, som igjen forteller oss at polynomet ikke har noen nullpunkter. Vi beholder derfor polynomet $x^2 - 2x + 3$ uforandret, og konkluderer med at det blir positivt for alle x.

3.9 Ulikheter

Vi løser ulikheter (med én ukjent) ved bruk av fortegnsdrøfting. Vi regner i stor grad som ved regning med ligninger, men hvis vi multipliserer en ulikhet med et negativt tall så må vi snu ulikheten. Derfor er det viktig at vi ikke multipliserer med noe vi ikke vet fortegnet til. Spesielt ikke et x-uttrykk!

Eksempel 3.15

Vi vil her løse ulikheten

$$4x \geq \frac{1}{x}$$

Merk at vi kan løse ligningen $4x = \frac{1}{x}$ ved å multiplisere med x, men det kan vi ikke gjøre når vi har en ulikhet (vi vet ikke hvilket fortegn x har, så vi vet ikke hva som skjer med ulikheten når vi multipliserer med x). I stedet samler vi leddene på den ene siden av ulikheten. Deretter trekker vi sammen og faktoriserer. Til slutt løser vi ved fortegnsdrøfting. Vi får da uttrykket $\frac{(2x+1)(2x-1)}{x} \geq 0$, som har løsning $-\frac{1}{2} \leq x < 0$ eller $x \geq \frac{1}{2}$.

Eksempel 3.16

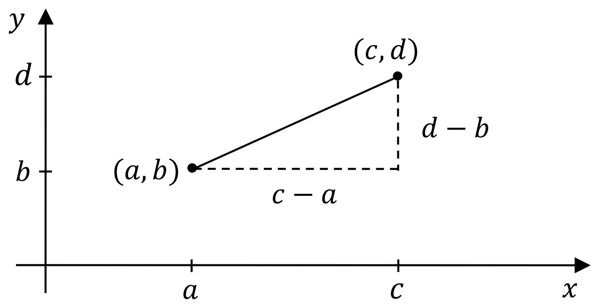
Gitt $x + \frac{2}{x} > 3$. Vi flytter alle leddene til venstre side av ulikhetstegnet, trekker sammen og får $\frac{x^2-3x+2}{x} > 0$. Telleren har nullpunktene $x = 1$ og $x = 2$, og vi kan dermed faktorisere og gjennomføre fortegnsdrøfting. (Løsningen blir $0 < x < 1$ eller $x > 2$.)

4. Funksjonsdrøfting

4.1 Koordinatsystem

Punkter i planet beskrives ved x- og y-koordinater. For å beregne avstand mellom to punkter bruker vi Pythagoras' formel, som gjelder for sidene i en rettvinklet trekant. Avstanden mellom punktene (a, b) og (c, d) blir

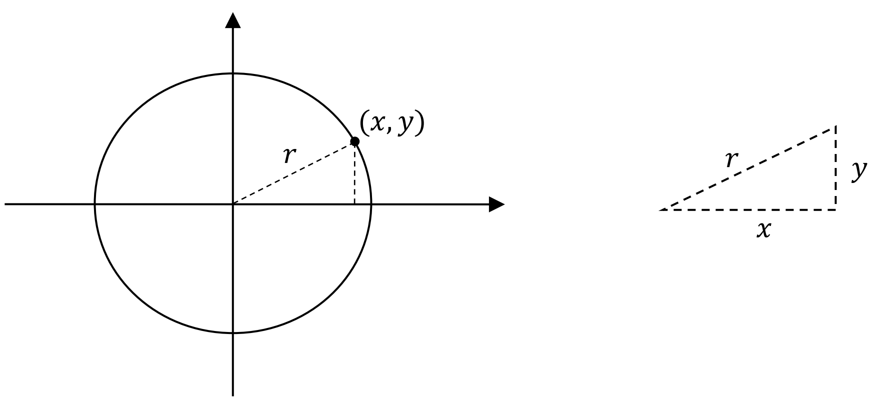
$$\sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$



I figuren har vi tegnet punktet (c, d) ovenfor og til høyre for (a, b), slik at $c - a$ og $d - b$ begge blir positive. Hvis punktene ligger på en annen måte kan en av eller begge disse størrelsene bli negative. Men formelen for avstanden mellom de to punktene blir likevel riktig uansett hvordan punktene ligger i forhold til hverandre, siden vi har $(c-a)^2 = (a-c)^2$ og $(d-b)^2 = (b-d)^2$.

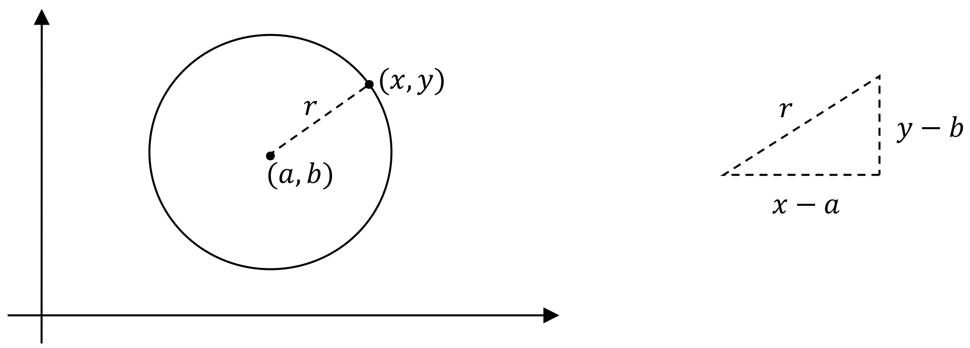
4.2 Sirkelligningen

Ligningen for en sirkel får vi direkte fra hvordan vi måler avstander i planet. En sirkel består nemlig av de punktene som har samme avstand fra sirkelens sentrum. Med sentrum i origo $(0, 0)$ og avstand (radius) r finner vi at sirkelen består av de punktene (x, y) som tilfredsstiller $x^2 + y^2 = r^2$.



Med sentrum i et annet punkt (a, b) blir sirkelligningen

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$



Vi minner også om formlene $O = 2\pi r$ og $A = \pi r^2$ for henholdsvis omkrets og areal av en sirkel med radius r.

4.3 Rette linjer

Ligningen for en rett linje er

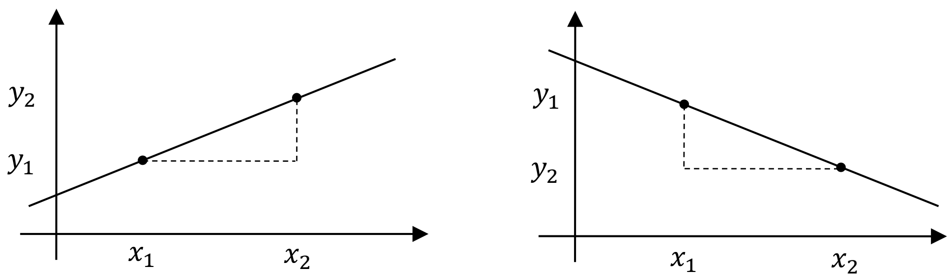
$$y = ax + b$$

Dette gjelder for alle rette linjer, med ett unntak: Vertikale (loddrette) linjer er gitt ved $x = c$.

Parameteren a er *stigningstallet* til linjen. Husk at stigningen mellom to punkter på linjen er definert som forholdet mellom forskjell i høyde og forskjell i lengde,

$$a = \frac{\text{høydeforskjell}}{\text{lengdeforskjell}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Merk at vi tar hensyn til fortegn når vi regner ut forskjeller her, slik at $a < 0$ for en fallende linje.



Rette linjer på implisitt form

I blant foretrekker vi å angi den rette linjen med en ligning på formen

$$ax + by = c$$

Vi sier da at linjen er gitt på *implisitt* form. Eksempel 4.2 nedenfor er et eksempel på dette.

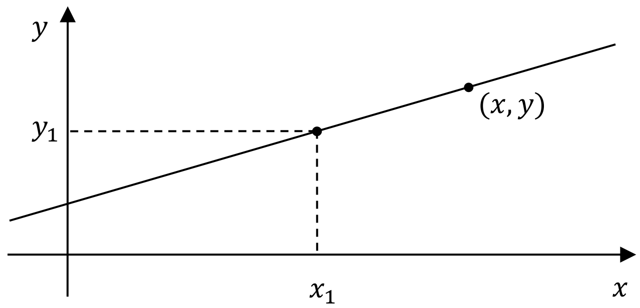
Det er mulig å skrive om ligningen $ax + by = c$ ved å løse med hensyn på y. Man får da ligningen $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, som er på samme form som den første ligningen ovenfor ($y = ax + b$), men hvor stigningen er $-\frac{a}{b}$.

Vi har to viktige formler for rette linjer:

4.4 Ettpunktsformelen

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

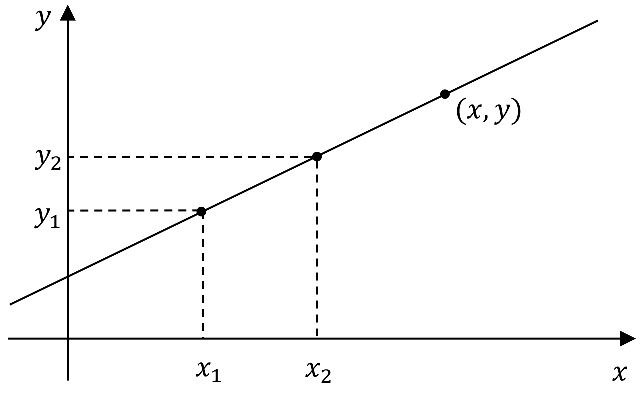
Her er a stigningstallet til den rette linjen, (x_1, y_1) er et fast punkt på linjen, og alle punkter (x, y) på linjen tilfredsstiller da ettpunktsformelen.



4.5 Topunktsformelen

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Her er (x_1, y_1) og (x_2, y_2) to forskjellige faste punkter på linjen, og alle punkter (x, y) på linjen tilfredsstiller da topunktsformelen.



Eksempel 4.1

Tegn en rett linje som går gjennom punktene $(4, 0)$ og $(0, 2)$, og finn ligningen for linjen.

Eksempel 4.2

Budsjettlinjer er et viktig eksempel på rette linjer i økonomi.

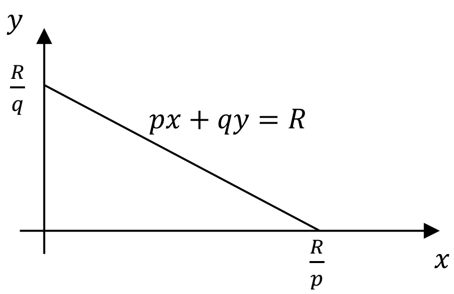
I dette eksemplet har vi to varer. Vi lar x stå for mengde av vare 1, og vi lar y stå for mengde av vare 2. Vare 1 koster p pr enhet, og vare 2 koster q pr enhet. Beløpet vi har til disposisjon til disse to varene er R, og vi vil gå ut fra at hele beløpet skal brukes opp. Budsjettlinjen angir da alle de kombinasjonene av vare 1 og vare 2 som vi har råd til å kjøpe. Vi finner ligningen for budsjettlinjen ved å sette total kostnad lik det beløpet vi har til disposisjon. Kostnaden for hver vare er gitt ved pris ganger mengde, eller px for vare 1 og qy for vare 2. Den totale kostnaden er summen av disse to kostnadene, og budsjettlinjen blir derfor

$$px + qy = R$$

Her er p, q, R parametrer, det vil si at vi tenker på dem som tall som er gitt i forveien, mens x og y er variabler, det vil si at de kan variere fritt så lenge ligningen blir tilfredsstilt. Hvis vi endrer på p, q eller R så endrer vi på linjen, mens hvis vi endrer på x og y så beveger vi oss fra et punkt til et annet punkt på samme linje.

Vi foretrekker ofte å ha ligningen for linjen på formen $px + qy = R$ fremfor å løse med hensyn på y og få $y = -\frac{p}{q}x + \frac{R}{q}$. Grunnen er at de ulike leddene i budsjettligningen har gode økonomiske tolkninger. For eksempel er px total kostnad for vare 1, mens leddet $-\frac{p}{q}x$ ikke har noen klar økonomisk tolkning.

For å tegne budsjettlinjen så trenger vi to punkter på den. Hvis vi velger å bruke hele beløpet på vare 1 så blir $y = 0$ og dermed $x = \frac{R}{p}$. Linjen må derfor gå gjennom punktet $(x, y) = \left(\frac{R}{p}, 0\right)$. Hvis vi i stedet velger å bruke hele beløpet på vare 2 så blir $x = 0$ og $y = \frac{R}{q}$. Linjen går derfor også gjennom punktet $(x, y) = \left(0, \frac{R}{q}\right)$. Vi kan da trekke en rett linje gjennom disse to punktene, og dette blir budsjettlinjen.



Siden det ikke gir god mening med negative mengder, så har vi bare tegnet opp den delen av budsjettlinjen hvor $x \geq 0$ og $y \geq 0$. Når budsjettlinjen er satt opp såpass generelt, med p, q, R i stedet for konkrete tall, så er det lettere å se hva som skjer hvis parameterne endres. Hvis for eksempel p

øker, mens q og R holdes fast, så vil punktet $\left(\frac{R}{p}, 0\right)$ bevege seg mot venstre mens punktet $\left(0, \frac{R}{q}\right)$ blir upåvirket. Resultatet er da at budsjettlinjen blir brattere.

4.6 Funksjoner

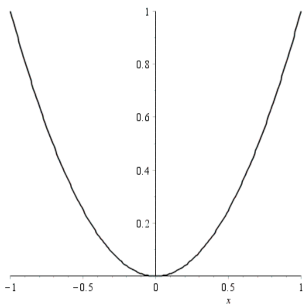
En funksjon er en *regel* som til ethvert tall i en gitt mengde tilordner et bestemt tall i en annen mengde. Hvis funksjonen betegnes med f så vil vi betegne tallet som tilordnes x med $f(x)$. (Ofte vil vi også la $f(x)$ betegne funksjonen, og ikke bare verdien i punktet x.)

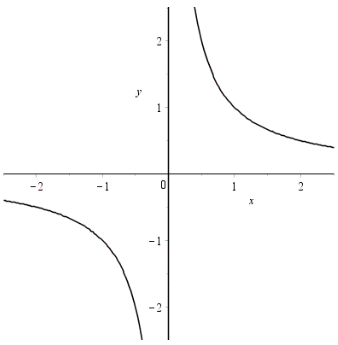
La f være en funksjon. Mengden av tall som vi kan gi til funksjonen kalles funksjonens *definisjonsmengde*, og betegnes med D_f. Mengden av tall som funksjonen kan gi tilbake kalles funksjonens *verdimengde*, og betegnes med V_f. Mengden av par $(x, f(x))$ kalles *grafen* til funksjonen.

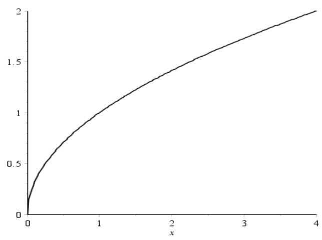
En funksjon er ofte gitt ved en formel, men den kan i prinsippet like gjerne beskrives verbalt, så lenge det er klart hva verdien av funksjonen er i hvert eneste punkt i definisjonsmengden.

Eksempler på funksjoner er polynomer, rasjonale funksjoner (det vil si brøkuttrykk med polynom i teller og i nevner) og potensfunksjoner. Vi kan også sette sammen slike (og andre) funksjoner og lage mer kompliserte eksempler.

Funksjonen $f(x) = x^2$ er et polynom hvor definisjonsmengden D_f er lik hele tallinjen. Vi kan skrive[2] dette som $\mathrm{D}_f = (-\infty, \infty)$ eller $\mathrm{D}_f = \langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$ eller $\mathrm{D}_f = \mathbf{R}$. Verdimengden til denne funksjonen er alle ikkenegative tall, det vil si $\mathrm{V}_f = [0, \infty)$.







$f(x)$ $\qquad$ $g(x)$ $\qquad$ $h(x)$

Den rasjonale funksjonen $g(x) = \frac{1}{x}$ har definisjonsmengde lik hele tallinjen unntatt punktet 0, siden uttrykket $\frac{1}{0}$ ikke er definert som et tall. Vi kan skrive dette som $\mathrm{D}_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ eller som $\mathrm{D}_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Verdimengden er her den samme mengden, $\mathrm{V}_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Potensfunksjonen (eller kvadratrotsfunksjonen) $h(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ har definisjonsmengde $\mathrm{D}_h = [0, \infty)$ og verdimengde $\mathrm{V}_h = [0, \infty)$.

[2] Det fins ulike notasjoner for åpne intervaller. Noen liker å bruke runde parenteser, som $(1, 3)$ for alle tallene mellom 1 og 3, mens andre foretrekker spisse parenteser, som $\langle 1, 3 \rangle$. Begge skrivemåtene er like riktige, men i dette kompendiet har jeg valgt å bruke runde parenteser.

Hvis definisjonsmengden ikke er beskrevet eksplisitt, så er det underforstått at den skal velges så stor som mulig gitt beskrivelsen av funksjonen. I blant velger vi bevisst å bruke en mindre definisjonsmengde, for eksempel hvis vi mener at funksjonen ikke beskriver virkeligheten godt ellers.

Eksempel 4.3
Funksjonen $K(x) = x - 100x^2$ skal beskrive kostnaden til en bedrift ved å produsere x enheter av en vare. Uttrykket $x - 100x^2$ kan regnes ut for alle verdier av x, både positive og negative, men det gir ikke god mening å produsere negative mengder. Derfor vil vi ikke ta med negative tall i definisjonsmengden til K. Hvis vi tegner grafen til $K(x)$ så ser vi at den blir voksende frem til $x = 50$, og deretter vil den avta. Vi har $K(100) = 0$ og $K(x) < 0$ for $x > 100$. Dette passer dårlig med tolkningen av $K(x)$ som en kostnadsfunksjon. Vi vil derfor heller ikke tillate alle positive tall i vår funksjon. Hva en fornuftig definisjonsmengde er vil her være et skjønnsspørsmål, men en mulighet kan være $\mathrm{D}_K = [0, 50]$. Da blir funksjonen $K(x)$ voksende på hele sin definisjonsmengde, slik at økt produksjon vil føre til økte kostnader.

4.7 Funksjoner med delt forskrift

Eksempel 4.4
En melkebonde får 5 kr literen for leveranser til sitt lokale meieri. Meieriet har kapasitetsproblemer og kan ta imot maksimalt 1000 liter. Alt over denne mengden må kastes. Verdien av bondens leveranse blir en funksjon av melkemengden x, gitt ved $f(x) = 5x$ for $0 \leq x \leq 1000$ og $f(x) = 5000$ for $x \geq 1000$. Funksjonen kan beskrives ved *delt forskrift*,

$$f(x) = \begin{cases} 5x & \text{hvis } 0 \leq x \leq 1000 \\ 5000 & \text{hvis } x > 1000 \end{cases}$$

Den er *kontinuerlig* ettersom verdien i $x = 1000$ blir den samme enten man bruker formelen $f(x) = 5x$ eller $f(x) = 5000$. Vi får dermed ikke noe hopp i grafen når vi skifter fra den ene formelen til den andre.

Definisjon
Mer generelt kan en funksjon med delt forskrift være gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{hvis } x \leq a \\ h(x) & \text{hvis } x > a \end{cases}$$

(Ulikhetene kan også være gitt ved henholdsvis $x < a$ og $x \geq a$ i de to tilfellene.) Her står $g(x)$ og $h(x)$ for ulike formler som gjelder på hvert sitt intervall, enten til venstre eller til høyre for punktet a. Funksjonen $f(x)$ er *kontinuerlig* i punktet a dersom $g(a) = h(a)$, og den er *deriverbar* i punktet a (se avsnitt 4.9) dersom vi har både $g(a) = h(a)$ og $g'(a) = h'(a)$.

Eksempel 4.5
Funksjoner med delt forskrift dukker naturlig opp i økonomi for eksempel i forbindelse med progressive skattesatser. Privatpersoner betalte tidligere 9 % toppskatt[3] på inntekt som oversteg et

[3] Erstattet av *trinnskatt* i 2016.

såkalt innslagspunkt, som i 2011 var 471 200 kr. Toppskatten for en person med inntekt x kr i 2011 var derfor gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } 0 \leq x \leq a \\ 0{,}09(x-a) & \text{hvis } x > a \end{cases}$$

Her er $a = 471\,200$. Funksjonen $f(x)$ er kontinuerlig, men ikke deriverbar i punktet $x = a$ siden grafen har en knekk akkurat her.

Eksempel 4.6

Et annet naturlig eksempel på en funksjon med delt forskrift er tallverdifunksjonen $f(x) = |x|$, som er gitt ved $f(x) = x$ for $x \geq 0$ og ved $f(x) = -x$ for $x < 0$. Vi har da

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{hvis } x \geq 0 \\ -x & \text{hvis } x < 0 \end{cases}$$

Vi har for øvrig også formelen $|x| = \sqrt{x^2}$ for alle x, både positive og negative.

4.8 Krumme linjer

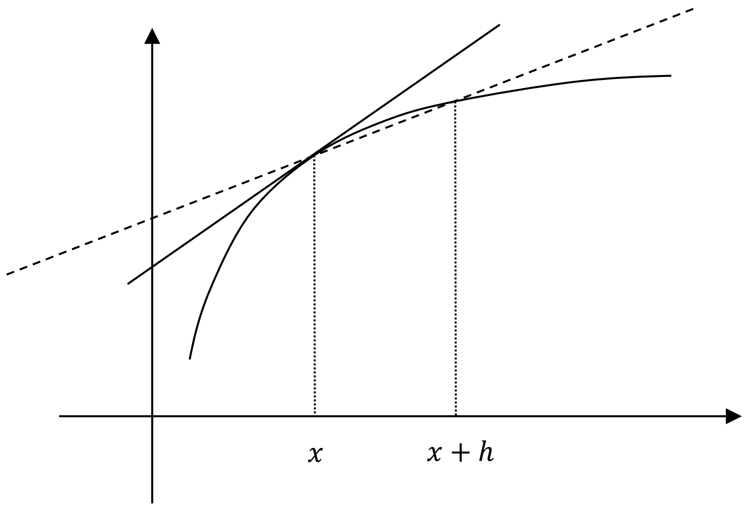
Krumme linjer, eller kurver, kan beskrives på ulike måter, men det vanligste for oss vil være å bruke grafen til en funksjon $f(x)$. Den består av punktene $\big(x, f(x)\big)$, hvor vi bruker alle x som $f(x)$ er definert for.

Sirkelen, som vi har diskutert i avsnitt 4.2 ovenfor, er en kurve som *ikke* er grafen til en funksjon. Grunnen er at det for *en* x-verdi kan finnes *to* forskjellige y-verdier på sirkelen.

4.9 Derivasjon

For å drøfte hvordan en krum kurve oppfører seg så bruker vi *tangentlinjer* til kurven. Poenget er at i nærheten av tangeringspunktet er det liten forskjell mellom den krumme kurven og den rette tangentlinjen.

Hvordan finner vi ligningen for tangentlinjen i et punkt $\big(x, f(x)\big)$ på grafen til en funksjon $f(x)$?



Hvis vi kjenner stigningstallet a til tangentlinjen så kan vi bruke ettpunktsformelen. Vi finner dette stigningstallet, som vi også kaller for $f'(x)$, ved å bruke topunktsformelen sammen med en grenseovergang.

$$a = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

På figuren ovenfor er $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ stigningstallet til den stiplede rette linjen. Når h blir mindre og mindre så vil de to skjæringspunktene mellom grafen til $f(x)$ og den stiplede linjen nærme seg hverandre, og den stiplede linjen nærmer seg tangentlinjen (den heltrukne rette linjen) mer og mer.

Dette resonnementet kan vi gjennomføre for hvert valg av x, og resultatet blir en funksjon $f'(x)$ som vi kaller den *deriverte* funksjonen av $f(x)$.

Fortegnet til den deriverte funksjonen $f'(x)$ forteller oss hvor den opprinnelige funksjonen $f(x)$ vokser og avtar. Når $f'(x) > 0$ så har tangenten til $f(x)$ positivt stigningstall, og $f(x)$ vokser når x øker. Når $f'(x) < 0$ så har tangenten negativt stigningstall, og $f(x)$ avtar når x øker. Jo større $f'(x)$ er i tallverdi, jo brattere blir grafen til $f(x)$.

Eksempel 4.7

Tegn grafen til $f(x) = x^3 - 3x$ og bruk figuren sammen med tolkning av $f'(x)$ som stigningstall for å tegne grafen til $f'(x)$ uten å bruke formelen for $f(x)$.

Eksempel 4.8

Bruk definisjonen av den deriverte til å finne $f'(x)$ når $f(x) = x^2$.

4.10 Regneregler for derivasjon

Ovenfor har vi forklart hva den deriverte funksjonen *er*, og hvordan den formelt er definert. I praksis vil vi gjerne *regne ut* den deriverte funksjonen, og da er det tungvint å bruke definisjonen. I stedet bruker vi regneregler, som dekker alle vanlige funksjoner som vi kan møte.

Potensregelen

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Den andre formelen stemmer med den første (potensregelen) dersom vi setter $n = -1$. Potensregelen gjelder også for negative n, og faktisk for alle reelle n. For eksempel kan vi bruke den til å derivere $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$. Vi får da $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Summeregelen

$$f(x) = u(x) + v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Produktregelen

$$f(x) = u(x)v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$$

Kvotientregelen

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2}$$

Med disse reglene kan vi derivere alle rasjonale funksjoner, det vil si brøker med polynom både i teller og nevner.

Kjerneregelen

Hvis $f(x)$ er en sammensatt funksjon, $f(x) = g\big(h(x)\big)$, så blir $f'(x) = g'\big(h(x)\big)h'(x)$.

Eksempel 4.9

Funksjonsdrøfting av $f(x) = x^3 - 3x$ ved å drøfte fortegnet til $f'(x)$.

Eksempel 4.10

Funksjonsdrøfting av $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$.

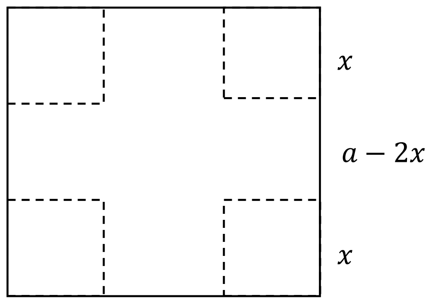
Eksempel 4.11

La $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ og $g(x) = -\frac{2x}{1+x}$. Regn ut $f'(x)$ og $g'(x)$. Vi finner at $f'(x) = g'(x) = -\frac{2}{(1+x)^2}$. Hvordan kan dette ha seg?

Hint: Vis at $f(x) - g(x) = 1$. Hvorfor er dette et svar på spørsmålet?

Eksempel 4.12

Vi lager en åpen boks uten lokk av et kvadrat ved å klippe bort små kvadrater i hjørnene og brette opp sidene. Hvordan skal dette gjøres slik at volum av boksen blir så stort som mulig?



La det store kvadratet ha sidekant a, og klipp bort fire små kvadrater, hver med sidekant x. Volum av boksen er grunnflate ganger høyde, som gir oss

$$V(x) = (a - 2x) \cdot (a - 2x) \cdot x = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$$

Vi finner

$$V'(x) = 12x^3 - 8ax + a^2 = 0$$

for $x = \frac{a}{6}$ og $x = \frac{a}{2}$. Vi kan faktorisere $V'(x) = 12\left(x - \frac{a}{6}\right)\left(x - \frac{a}{2}\right)$, og fortegnsdrøfting av $V'(x)$ gir nå at $V'(x) > 0$ for $x < \frac{a}{6}$ og for $x > \frac{a}{2}$, mens $V'(x) < 0$ for $\frac{a}{6} < x < \frac{a}{2}$. Merk at formelen for $V(x)$ bare gir mening for $0 < x < \frac{a}{2}$, siden vi ellers ikke får noen eske (en av sidene får negativ lengde). I punktet $x = \frac{a}{6}$ skifter $V'(x)$ fortegn fra pluss til minus, og det følger at $V(x)$ må ha et toppunkt for $x = \frac{a}{6}$. Volum blir derfor maksimert ved å velge $x = \frac{a}{6}$.

Merk: Regningen ovenfor blir lettere ved bruk av kjerneregelen for derivasjon. I så fall blir det ikke nødvendig å multiplisere ut uttrykket for $V(x)$ før vi deriverer, vi slipper å bruke formel for å løse annengradsligningen $V'(x) = 0$, og faktoriseringen av $V'(x)$ blir mye lettere. Gjør dette, og sammenlign med regningen ovenfor!

Eksempel 4.13

Tidligere har vi sett hvordan vi kan tegne grafen til $f'(x)$ ut fra grafen til $f(x)$, der vi har brukt. tolkningen av $f'(x)$ som stigningstallet til tangentlinjen til $f(x)$ i punktet $(x, f(x))$. La nå i stedet grafen til $f'(x)$ være gitt (for eksempel ved $f'(x) = x^3 - 3x$) og tegn grafen til $f(x)$ på tilsvarende måte, uten å gjøre bruk av formeluttrykket for $f'(x)$. Merk at $f(x)$ ikke blir entydig fastlagt av $f'(x)$, men hvis vi antar at $f(0) = 0$ så kan vi tegne resten av grafen. (Den deriverte av en konstant er lik null, slik at $f(x)$ og $f(x) + c$ har samme derivert $f'(x)$ uansett hvilken c vi bruker.)

Eksempel 4.14

Funksjonsdrøfting av $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

Fasit: Vi har $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $f(x)$ er avtakende på $(-\infty, -1]$ og på $[1, \infty)$, og $f(x)$ er voksende på $[-1, 1]$.

Eksempel 4.15

Funksjonsdrøfting av $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$.

Fasit: Vi har $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$, $f(x)$ er voksende på $(-\infty, -1)$ og på $(-1, 0]$, og $f(x)$ er avtakende på $[0, 1)$ og på $(1, \infty)$.

4.11 Asymptoter

Vi finner *horisontale asymptoter* ved å la x gå mot pluss/minus uendelig. Bruk $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ som eksempel (se eksempel 4.15 ovenfor), divider med x^2 i teller og nevner, og vis hvordan brøken nærmer seg 1.

Vi finner *vertikale asymptoter* ved å se etter punkter hvor $f(x)$ nærmer seg pluss eller minus uendelig. Dette er i praksis gjerne punkter hvor vi får null i nevneren (eller hvor vi får logaritmen av null). Samme eksempel $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ kan brukes her.

4.12 En økonomisk tolkning av den deriverte

La $K(x)$ stå for den totale kostnaden for å produsere x enheter av en vare. Den deriverte av $K(x)$ er gitt ved

$$K'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{K(x+h) - K(x)}{h}$$

I stedet for å la $h \to 0$ så vil vi sette inn en *liten* verdi for h i brøken på høyre side ovenfor. Dette gir oss en verdi som ikke er nøyaktig lik $K'(x)$, men som er nesten lik. Den verdien for h som vi vil bruke er $h = 1$, og vi går ut fra at enhetene er valgt slik at dette er et lite tall sammenlignet med total produksjon x. Vi får da

$$K'(x) \approx \frac{K(x+1) - K(1)}{1} = K(x+1) - K(x)$$

Det siste uttrykket har en konkret økonomisk tolkning, nemlig økningen i total kostnad når produksjonen økes fra x til $x+1$. Dette er det samme som kostnadsøkningen hvis vi produserer en ekstra enhet. Av denne grunn kalles $K'(x)$ ofte for *marginalkostnad* eller *grensekostnad* i økonomiske sammenhenger.

5. Eksponentialfunksjoner og logaritmer

5.1 Eksponentialfunksjoner

Vi har definert potenser a^b og vi har regnet med potensfunksjoner $h(x) = x^a$, der x er variabel og parameteren a holdes fast. *Eksponentialfunksjoner* er definert ved $f(x) = a^x$, der nå grunntallet skal holdes fast mens eksponenten får variere. Vi krever da at grunntallet er positivt, det vil si at $a > 0$, slik at $f(x)$ blir veldefinert for alle x. Regnereglene fra kapittel 2 for potenser gjelder fremdeles og kan brukes også ved regning med eksponentialfunksjoner. Derimot har vi ikke med noen derivasjonsregler for eksponentialfunksjoner i kapittel 4, så vi begynner med å se kort på dette.

Eksempel 5.1

La $f(x) = 2^x$. Vi beregner $f'(x)$ ved å bruke definisjonen av den deriverte.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2^{x+h} - 2^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2^x \cdot 2^h - 2^x}{h} = 2^x \lim_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h}$$

I den siste brøken har vi leddene $2^h = f(h)$ og $1 = f(0)$ i telleren, og vi får derfor

$$f'(x) = 2^x \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 2^x \cdot f'(0)$$

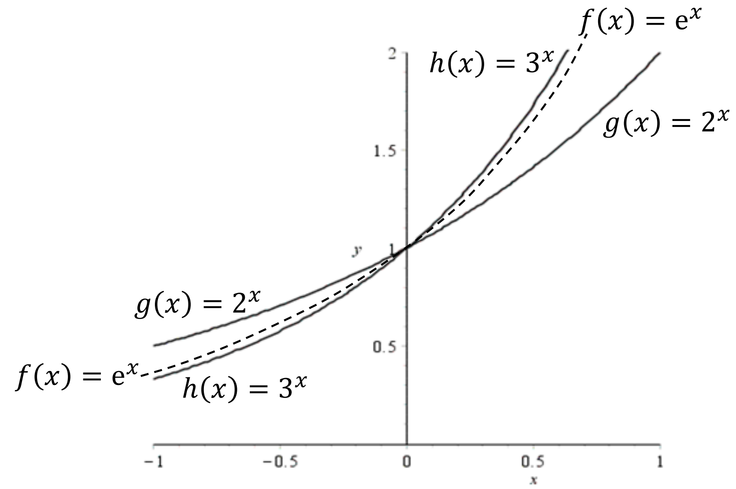
På samme måte finner vi at hvis $f(x) = a^x$ så blir $f'(x) = a^x \cdot f'(0)$. (Bytt ut tallet 2 med tallet a alle plasser i regningen ovenfor.)

Tallet $f'(0)$ er stigningstallet til tangenten til $f(x)$ i punktet $x = 0$. Vi kan tegne grafen til $f(x) = a^x$ for ulike a-verdier (se figur på neste side). Vi finner da at hvis $a = 2$ så blir $f'(0) \approx 0{,}7$, og hvis $a = 3$ så blir $f'(0) \approx 1{,}2$. Formelen for $f'(x)$ blir penest hvis $f'(0) = 1$, og vi setter et spesielt navn på det grunntallet som gir dette:

5.2 Den naturlige eksponentialfunksjonen

Hvis $\mathrm{e} = 2{,}71828\ldots$ og $f(x) = \mathrm{e}^x$ så blir $f'(0) = 1$, og dermed $f'(x) = \mathrm{e}^x$. Eksponentialfunksjonen med dette grunntallet kalles for *den naturlige eksponentialfunksjonen*.

I figuren nedenfor er det den stiplede kurven som er grafen til den naturlige eksponentialfunksjonen $f(x) = \mathrm{e}^x$. Til sammenligning har vi også tegnet grafene til eksponentialfunksjonene $g(x) = 2^x$ og $h(x) = 3^x$.



Eksponentialfunksjoner brukes blant annet i forbindelse med modellering av vekst. Se eksempel 5.2 og 5.3 nedenfor.

5.3 Den naturlige logaritmen

Logaritmer er omvendte (inverse) funksjoner til eksponentialfunksjoner. Siden vi er mest interessert i den naturlige eksponentialfunksjonen så vil vi bare se på den tilhørende logaritmen, som kalles for den *naturlige logaritmen*. Den naturlige logaritmen av et tall x betegnes med $\ln(x)$. At det er den omvendte funksjonen til eksponentialfunksjonen betyr at

$$\text{hvis } y = \mathrm{e}^x \text{ så er } x = \ln(y),$$

og omvendt. Dette betyr også at vi har $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$ og $\ln(\mathrm{e}^x) = x$ for alle x.

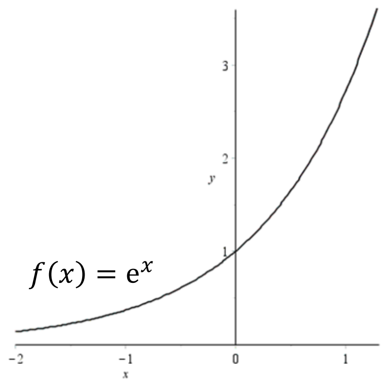
Vi lager en liten tabell over verdier til e^x, og viser hvordan vi kan bruke den samme tabellen til å tegne grafen til den naturlige logaritmefunksjonen $\ln x$. Lengst til høyre har vi ført opp at $x = \ln(y)$ og $y = \mathrm{e}^x$.

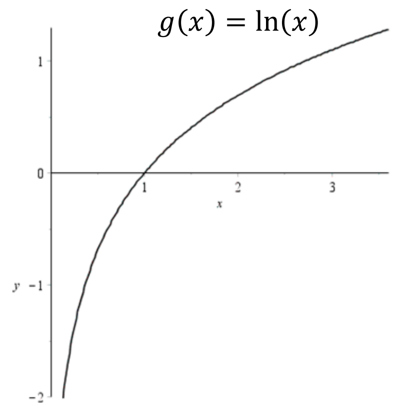
x	0	1	-1	2	$\ln(y)$
e^x	1	2,7	0,36	7,3	y

Vi kan nå lese ut av denne tabellen at hvis $y = 1$ så er $\ln(1) = 0$, hvis $y = 2{,}7$ så er $\ln(2{,}7) = 1$, og så videre. Vi har dermed fire logaritmeverdier. Hvis vi bytter om rekkefølgen på de to rekkene så får vi en tabell over verdier til logaritmefunksjonen i stedet for verdier til eksponentialfunksjonen. Vi velger da å kalle tallet vi putter inn i eksponentialfunksjonen for x, slik at vi kan tegne grafen til logaritmefunksjonen på vanlig måte i et xy-diagram. Dette gir tabellen

x	1	2,7	0,36	7,3
$\ln(x)$	0	1	-1	2

Tabellen for verdier til eksponentialfunksjonen gir oss dermed også verdier til logaritmefunksjonen, og den kan brukes til å tegne begge grafene, både til $f(x) = \mathrm{e}^x$ og til $g(x) = \ln(x)$. (Nedenfor har kuttet av grafene litt, slik at det fjerde punktet ikke kommer med på figurene.)





5.4 Regneregler

Hver regneregel for eksponentialfunksjonen gir opphav til en regneregel for logaritmefunksjonen.

(i) Vi har regneregelen $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$ for alle x og y. Sett $x = \ln a$ og $y = \ln b$, og vi får

$$\mathrm{e}^{\ln a + \ln b} = \mathrm{e}^{\ln a}\mathrm{e}^{\ln b} = ab = \mathrm{e}^{\ln ab}$$

Her har vi brukt at $e^{\ln(a)} = a$, $e^{\ln(b)} = b$ og $e^{\ln(ab)} = ab$. Likheten $\mathrm{e}^{\ln(a)+\ln(b)} = \mathrm{e}^{\ln(ab)}$ er bare mulig dersom de to eksponentene er like. Det vil si at vi må ha $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

(ii) Vi gjør det samme med regneregelen $\mathrm{e}^{x-y} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$ og får

$$\mathrm{e}^{\ln(a)-\ln(b)} = \frac{\mathrm{e}^{\ln(a)}}{\mathrm{e}^{\ln(b)}} = \frac{a}{b} = \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

Igjen er dette mulig bare dersom de to eksponentene er like, hvilket her vil si at $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

(iii) Vi har også regneregelen $(\mathrm{e}^x)^y = \mathrm{e}^{xy}$. Sett $x = \ln(a)$ og $y = b$. Dette gir oss

$$\mathrm{e}^{b\ln(a)} = \left(\mathrm{e}^{\ln(a)}\right)^b = a^b = \mathrm{e}^{\ln(a^b)}$$

Det følger at $\ln\left(a^b\right) = b\ln(a)$.

(iv) Vi har $e^0 = 1 = \mathrm{e}^{\ln(1)}$, og dermed blir $\ln(1) = 0$.

5.5 Regneregler for naturlige logaritmer

Vi sammenfatter regnereglene for naturlige logaritmer:

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln\left(a^b\right) = b\ln(a)$$

$$\ln(1) = 0$$

Merk at vi ikke kan ta logaritmen til null eller til negative tall.

Andre eksponentialfunksjoner kan skrives om til den naturlige eksponentialfunksjonen ved å bruke

$$a^x = \mathrm{e}^{\ln(a^x)} = \mathrm{e}^{x\ln(a)}$$

Vi kan nå løse ligninger hvor den ukjente står i eksponenten i en potens.

Eksempel 5.2

Vi setter 10 000 kr i banken til 4 % årlig rente. Hvor lang tid tar det før beløpet har vokst til 15 000 kr?

Etter n år har beløpet vokst til $10\,000 \cdot 1{,}04^n$. Vi løser ligningen $10\,000 \cdot 1{,}04^x = 15\,000$ og får

$$1{,}04^x = \frac{15\,000}{10\,000} = 1{,}5$$

$$\ln(1{,}04^x) = \ln(1{,}5)$$

$$x\ln(1{,}04) = \ln(1{,}5)$$

$$x = \frac{\ln(1{,}5)}{\ln(1{,}04)} = 10{,}338\,\ldots$$

Vi tolker dette som at først etter 11 år vil beløpet ha passert 15 000 kr.

Eksempel 5.3

La $P(t)$ betegne befolkningen i Europa målt i millioner mennesker t år etter 1950. Vi får oppgitt at $P(0) = 548$ og $P(25) = 676$. Anta at $P(t)$ utvikler seg eksponentielt, det vil si at $P(t) = A\mathrm{e}^{kt}$ for passende konstanter A og k. Beregn A og k ut fra de gitte opplysningene, og finn deretter $P(57)$, som blir et estimat på befolkningens størrelse i 2007. (Til sammenligning var FNs anslag i 2006 gitt ved 731 millioner mennesker. Hvilke matematiske og økonomiske konklusjoner er det riktig å trekke ut fra dette?)

5.6 Derivasjon av naturlig logaritme

For å derivere den naturlige logaritmen bruker vi kjerneregelen, som sier at hvis $f(x) = g\big(h(x)\big)$ så blir $f'(x) = g'\big(h(x)\big)h'(x)$. Vi vil bruke denne regelen på funksjonen $f(x) = \mathrm{e}^{\ln(x)} = x$. Sett $y = h(x) = \ln(x)$ og $g(y) = \mathrm{e}^y$. Da er $f'(x) = 1$, $g'(y) = \mathrm{e}^y$, og vi kan finne $h'(x)$.

$$f'(x) = g'\big(h(x)\big)h'(x)$$

$$1 = \mathrm{e}^{\ln(x)} \cdot h'(x)$$

$$1 = x \cdot h'(x)$$

$$h'(x) = \frac{1}{x}$$

Dette blir den deriverte til den naturlige logaritmen, siden $h(x) = \ln(x)$.

Ved å bruke kjerneregelen så kan vi også derivere mer sammensatte funksjoner. Hvis $f(x) = \mathrm{e}^{g(x)}$ så blir $f'(x) = \mathrm{e}^{g(x)}g'(x)$, og hvis $f(x) = \ln\big(g(x)\big)$ så blir $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$.

5.7 Oppsummering

Vi oppsummerer de viktigste egenskapene til naturlig eksponentialfunksjon og naturlig logaritme:

Definisjon

Hvis $y = \mathrm{e}^x$ så er $x = \ln(y)$. Hvis $y = \ln(x)$ så er $x = \mathrm{e}^y$.

Omvendte operasjoner

Vi har

$$\mathrm{e}^{\ln(x)} = x, \qquad \ln(\mathrm{e}^x) = x$$

Null og negative tall

Eksponentialfunksjonen kan aldri *bli* null eller negativ. Man kan ikke ta logaritmen *av* null eller noe negativt tall.

Vi har

$$\mathrm{e}^0 = 1, \qquad \ln(1) = 0$$

Algebraiske regneregler

Vi har

$$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y, \qquad \mathrm{e}^{x-y} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}, \qquad (\mathrm{e}^x)^y = \mathrm{e}^{xy}$$

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b), \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b), \qquad \ln\left(a^b\right) = b\ln(a)$$

Andre eksponentialfunksjoner
Andre eksponentialfunksjoner kan omskrives ved hjelp av den naturlige eksponentialfunksjonen.

$$a^x = \mathrm{e}^{rx}, \qquad r = \ln(a)$$

Derivasjon
Hvis $f(x) = \mathrm{e}^x$ så er

$$f'(x) = \mathrm{e}^x$$

Hvis $g(x) = \ln(x)$ så er

$$g'(x) = \frac{1}{x}$$

Derivasjon med kjerneregelen
Hvis $f(x) = \mathrm{e}^{h(x)}$ så er

$$f'(x) = \mathrm{e}^{h(x)} \cdot h'(x)$$

Hvis $g(x) = \ln\big(h(x)\big)$ så er

$$g'(x) = \frac{h'(x)}{h(x)}$$